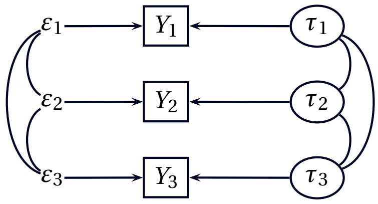
# Einführung in die Testtheorie und Testkonstruktion

Prof. Dr. Rolf Steyer

5. April 2016

**Ausgangspunkt**





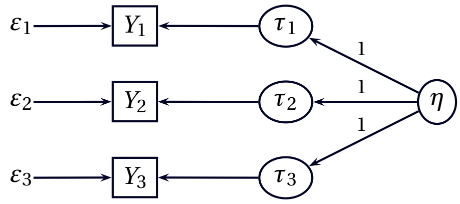


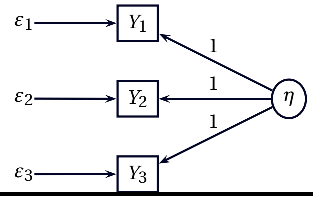

**Das Modell paralleler Tests**

Annahmen ($a_1$), (b) und (c):

- ($a_1$) $\tau$-Äquivalenz $\tau_i = \tau_j$
- (b) unkorrelierte Fehler $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j$
- (c) gleiche Fehlervarianzen $Var(\varepsilon_i) = Var(\varepsilon_j)$

## Pfaddiagramm






## Implizierte Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= Cov(\eta + \varepsilon_1, \eta + \varepsilon_2) \\ &= Cov(\eta, \eta) + Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + Cov(\eta, \varepsilon_1) + Cov(\eta, \varepsilon_2) \\ &= Var(\eta) \\ &= : \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y_i) - Cov(Y_1, Y_2) &= Var(\varepsilon_i) \\ &=: \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

**Implizierte Kovarianzmatrix**

Implizierte Kovarianzstruktur bei 3 parallelen Tests:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 \\ \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 \\ \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$



**Identifikation der theoretischen Größen**

Die theoretischen Größen können wie folgt aus den empirischen berechnet werden:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= E(Y_i) \\ Var(\eta) &= Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j \\ Var(\varepsilon_i) &= Var(Y_i) - Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j \\ Rel(Y_i) &= Corr(Y_i, Y_j), \quad i \neq j \end{aligned}$$

**Testbarkeit**

Testbarkeit in der Gesamtpopulation

- $E(Y_i) = \mu$
- $Var(Y_i) = \sigma_Y^2$
- $Cov(Y_i, Y_j) = \sigma_\eta^2 \qquad i \neq j.$

In der Gesamtpopulation sind die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen also für alle Testwertvariablen $Y_i$ gleich.

Testbarkeit in jeder Subpopulation

- $E^{(s)}(Y_i) = \mu^{(s)}$
- $Var^{(s)}(Y_i) = \sigma_Y^{2\,(s)}$
- $Cov^{(s)}(Y_i, Y_j) = \sigma_\eta^{2\,(s)} \qquad i \neq j.$

Innerhalb jeder Subpopulation *s* sind die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen also für alle Testwertvariablen $Y_i$ gleich, zwischen *verschiedenen* Subpopulation können sie dagegen verschieden sein.



**Spearman-Brown-Formel**

Testverlängerung $S := Y_1 + ... + Y_m$

Annahmen ($a_1$), (b) und (c) implizieren:

Spearman-Brown-Formel
bei parallelen Tests: $$Rel(S) = \frac{m \cdot Rel(Y)}{1 + (m-1) \cdot Rel(Y)}.$$

## Herleitung der Spearman-Brown-Formel

Reliabilität von $S := Y_1 + ... + Y_m$: $Rel(S) = \frac{Var(\eta_S)}{Var(S)}$.
Implikationen des Modells paralleler Tests:

$$
\begin{aligned}
Var(Y_i) &= Var(Y), \quad \forall\ i = 1, \cdots, m. \\
Cov(Y_i, Y_j) &= Var(\eta), \quad \forall\ i, j = 1, \cdots, m, \ \ i \neq j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\eta_S) &= Var[E(S\,|\,U)] = Var[E(Y_1 + ... + Y_m\,|\,U)] \\
&= Var[E(Y_1\,|\,U) + ... + E(Y_m\,|\,U)] = Var(m \cdot \eta) = m^2 \cdot Var(\eta).
\end{aligned}
$$

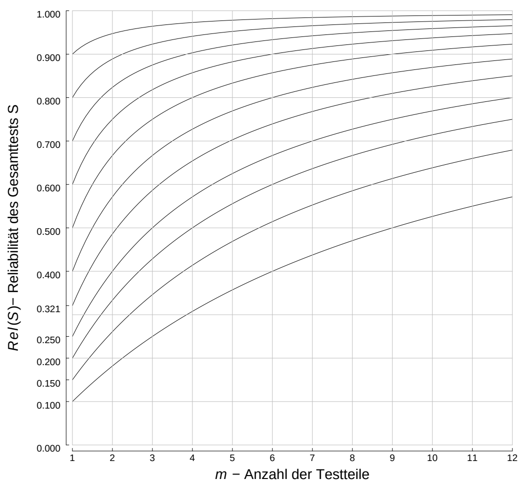
$$
Var(S) = Var(Y_1 + ... + Y_m) = m \cdot Var(Y) + m \cdot (m-1)\, Var(\eta).
$$

Also

$$
\begin{aligned}
Rel(S) &= \frac{Var(\eta_S)}{Var(S)} = \frac{m^2 \cdot Var(\eta)}{m \cdot Var(Y) + m \cdot (m-1)\, Var(\eta)} \\
&= \frac{m \cdot Var(\eta) / Var(Y)}{Var(Y)/Var(Y) + (m-1)\, Var(\eta)/Var(Y)} \\
&= \frac{m \cdot Rel(Y)}{1 + (m-1) \cdot Rel(Y)}.
\end{aligned}
$$



## Spearman-Brown-Formel




Grafische Darstellung der Spearman−Brown−Formel