Inferenzstatistik

Vorlesung SS 15

Zufallsvariablen

Prof. Dr. Rolf Steyer

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen ordnen jedem Ergebnis des betrachteten Zufallsexperiments einen Wert zu. Diese Werte können Zahlen, aber auch Elemente beliebiger anderer Mengen sein. Zufallsvariablen haben immer eine Verteilung und können stochastisch unabhängig oder auch abhängig voneinander sein.

Zufallsvariablen sind Abbildungen $X : \Omega \to \Omega'$, wobei Ω die Menge der möglichen Ergebnisse ist und Ω' die Menge der möglichen Werte von X enthält. X weist jedem Element von Ω genau einen Wert in der Menge Ω' zu.

Beispiele

Beim Ziehen einer Person aus einer Menge von Personen ordnet die Zufallsvariable $X_1 :=$ *Geschlecht* der Person den Wert *weiblich* oder *männlich* zu, abhängig vom Geschlecht der gezogenen Person. Ω' ist in diesem Beispiel folglich definiert als $\Omega' := \{weiblich, männlich\}$.

Die Zufallsvariable $X_2 := BMI$ transformiert das Ergebnis in eine den BMI (body mass index) repräsentierende Zahl. Ω' ist somit definiert als Menge aller positiver reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$.

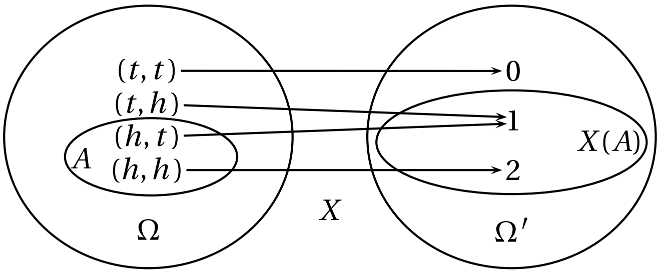
Urbild

In der allgemeinen Definition der Zufallsvariablen wird das Konzept des Urbilds verwendet. Das *Urbild* $X^{-1}(A')$ von A' unter X ist das Ereignis, dass $X : \Omega \to \Omega'$ einen Wert in der Menge $A' \subset \Omega'$ annimmt:

$$X^{-1}(A') \; := \; \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$$

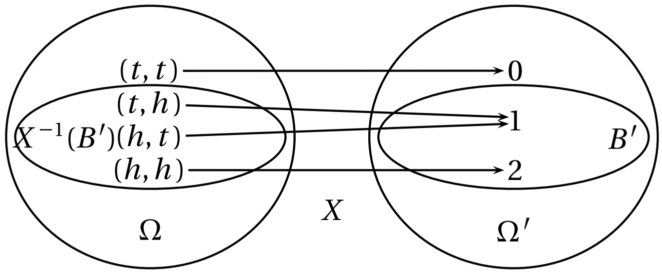
Ein Wert x einer Zufallsvariable X repräsentiert folglich das Ereignis $X^{-1}(\{x\})$, dass X den Wert x annimmt. Dieses Ereignis notieren wir der Einfachheit halber auch mit $\{X{=}x\}$.

Anzahl der Kopfwürfe und Bild



An event and its image under a random variable

Anzahl der Kopfwürfe und Urbild



A set and its inverse image under a random variable

Notations for Events Represented by a Random Variable

Notation for Events Represented by a Random Variable X

$\{X \in \Omega'\}$	$= X^{-1}(\Omega')$	$= \Omega$	0, 1, or 2 heads are flipped
$\{X \in \emptyset\}$	$= X^{-1}(\emptyset)$	$= \emptyset$	neither 0, 1, nor 2 *heads* are flipped
$\{X=0\}$	$= X^{-1}(\{0\})$	$= \{(t,t)\}$	no *heads* are flipped.
$\{X=1\}$	$= X^{-1}(\{1\})$	$= \{(h,t),(t,h)\}$	*heads* are flipped exactly once
$\{X=2\}$	$= X^{-1}(\{2\})$	$= \{(h,h)\}$	two heads are flipped
$\{X \in \{0,1\}\}$	$= X^{-1}(\{0,1\})$	$= \{(h,t),(t,h),(t,t)$	not more than one *heads* are flipped.
$\{X \in \{0,2\}\}$	$= X^{-1}(\{0,2\})$	$= \{(h,h),(t,t)\}$	either two heads or no *heads* at all are flipped
$\{X \in \{1,2\}\}$	$= X^{-1}(\{1,2\})$	$= \{(h,h),(h,t),(t,h)\}$	at least one *heads* is flipped

Joe and Ann With Random Variables

Elements of Ω			Random variables			
Unit	Treatment	Success	Observational-unit variable U	Treatment variable X	Outcome variable Y	Probabilities of elementary events $P(\{\omega\})$
(*Joe*,	*no*,	$-$)	*Joe*	0	0	.09
(*Joe*,	*no*,	$+$)	*Joe*	0	1	.21
(*Joe*,	*yes*,	$-$)	*Joe*	1	0	.04
(*Joe*,	*yes*,	$+$)	*Joe*	1	1	.16
(*Ann*,	*no*,	$-$)	*Ann*	0	0	.24
(*Ann*,	*no*,	$+$)	*Ann*	0	1	.06
(*Ann*,	*yes*,	$-$)	*Ann*	1	0	.16
(*Ann*,	*yes*,	$+$)	*Ann*	1	1	.04

Definition von Zufallsvariablen

Definition 1. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Ω' eine Menge und $\mathscr{A}'$ eine σ-Algebra auf Ω'. Eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt *Zufallsvariable mit Werten in* $(\Omega', \mathscr{A}')$, wenn gilt:

$$X^{-1}(\mathscr{A}') \subset \mathscr{A},$$

wobei

$$X^{-1}(\mathscr{A}') := \{X^{-1}(A') : A' \in \mathscr{A}'\}.$$

Die Menge $X^{-1}(\mathscr{A}')$ ist eine σ-Algebra. Sie heißt die von X *erzeugte* σ-Algebra. Sie wird oft auch einfach mit $\sigma(X)$ notiert.

Diese Definition stellt sicher, dass eine Zufallsvariable eine *Verteilung* hat, wie wir bald sehen werden.

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen X und Y

Definition 2. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \Omega'_X$ eine Zufallsvariable mit Werten in $(\Omega'_X, \mathscr{A}'_X)$ und $Y : \Omega \to \Omega'_Y$ eine Zufallsvariable mit Werten in $(\Omega'_Y, \mathscr{A}'_Y)$. Dann heißen X und Y (stochastisch) *unabhängig* (hinsichtlich P), wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{für alle } (A, B) \in X^{-1}(\mathscr{A}'_X) \times Y^{-1}(\mathscr{A}'_Y).$$

Unabhängigkeit von Ereignismengen

Definition 3. Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichskeitsraum. Die Ereignismengen $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n \subset \mathscr{A}$ heißen *(stochastisch) unabhängig,* wenn jedes n-Tupel $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{E}_1 \times \ldots \times \mathscr{E}_n$ unabhängig ist.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 4. Seien $X_1 : \Omega \to \Omega'_1, \ \ldots, \ X_n : \Omega \to \Omega'_n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit Werten in $(\Omega'_1, \mathscr{A}'_1), \ \ldots, \ (\Omega'_n, \mathscr{A}'_n)$. Die Zufallsvariablen $X_1, \ \ldots, \ X_n$ heißen *unabhängig*, wenn die σ-Algebren $X_1^{-1}(\mathscr{A}'_1), \ \ldots, \ X_n^{-1}(\mathscr{A}'_n)$ unabhängig sind.

Joe and Ann With Self-Selection

Table 1: Joe and Ann With Self-Selection

Outcomes ω				Observables		
Unit	Treatment	Success	$P(\{\omega\})$	Person variable U	Treatment variable X	Outcome variable Y
(*Joe*,	*no*,	−)	.144	*Joe*	0	0
(*Joe*,	*no*,	+)	.336	*Joe*	0	1
(*Joe*,	*yes*,	−)	.004	*Joe*	1	0
(*Joe*,	*yes*,	+)	.016	*Joe*	1	1
(*Ann*,	*no*,	−)	.096	*Ann*	0	0
(*Ann*,	*no*,	+)	.024	*Ann*	0	1
(*Ann*,	*yes*,	−)	.228	*Ann*	1	0
(*Ann*,	*yes*,	+)	.152	*Ann*	1	1

Note. The probabilities of the elementary events are fictive