Übung Inferenzstatistik

3. Termin

Sommersemester 2011

Heute

Ziel: Die Logik des Testens verstehen

Themen:

1. Hypothesen formulieren
2. Testverfahren: *t*-Test bei einer Stichprobe

2.A Exkurs: Verteilung von Mittelwerten (Standardfehler)

3. Statistische Entscheidung und mögliche Fehler
4. SPSS-Anwendung

4.A Exkurs: Einseitiges/Zweiseitiges Testen

Literatur: Nachtigall & Wirtz, Abschn. II A1 (S.105-115) und
Abschn. II B (S.122-135)

Der (statistische) Test

Analogie:

1. Frage
2. Anwendung
3. Antwort

1. Hypothesen

Nullhypothese und Alternativhypothese

- komplementär
- gerichtet vs. ungerichtet

Zusätzlich:

- α -Niveau festlegen (häufig 5% bzw. .05)
- wird <u>vor</u> der Analyse festgelegt

Testlogik in der Pearson-Neymann-Tradition:

Wir gehen davon aus, dass die Nullhypothese gilt. Das Ziel ist (meist), die Nullhypothese zu verwerfen.

1. Hypothesen

Beispielfragestellung 1:

- Sind Psychologiestudierende im Mittel weniger neurotisch als der Referenzwert einer repräsentativen Normstichprobe von 20.99?

Alternativhypothese (H_1):

Nullhypothese (H_0):

1. Hypothesen

Beispielfragestellung 2:

- Weichen Psychologiestudierende im Mittel vom Referenzwert für Extraversion der repräsentativen Normstichprobe von 26.88 ab?

Alternativhypothese (H_1):

Nullhypothese (H_0):

2. Testverfahren

t-Test bei einer Stichprobe

Voraussetzungen:

- Fragestellung: *E(X)* mit vorgegebenen Wert vergleichen
- EINE Zufallsstichprobe
- Normalverteilung der Zufallsvariablen
  oder ausreichend große Stichprobe

Prüfgröße:

t-Wert

$$t \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$$

Prüfverteilung:

t-Verteilung mit $df = n - 1$

$\bar{X}$ Stichprobenmittelwert

μ_0 Referenzwert

$\hat{\sigma}_X$ Schätzer f. Standardabweichung

n Stichprobengröße

$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$ Schätzer f. Standardfehler

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

1. Zufallsexperiment: Würfelwurf

- Zufallsvariable: X (Augenzahl bei einem Würfelwurf)
- Frage: Was ist $E(X)$?

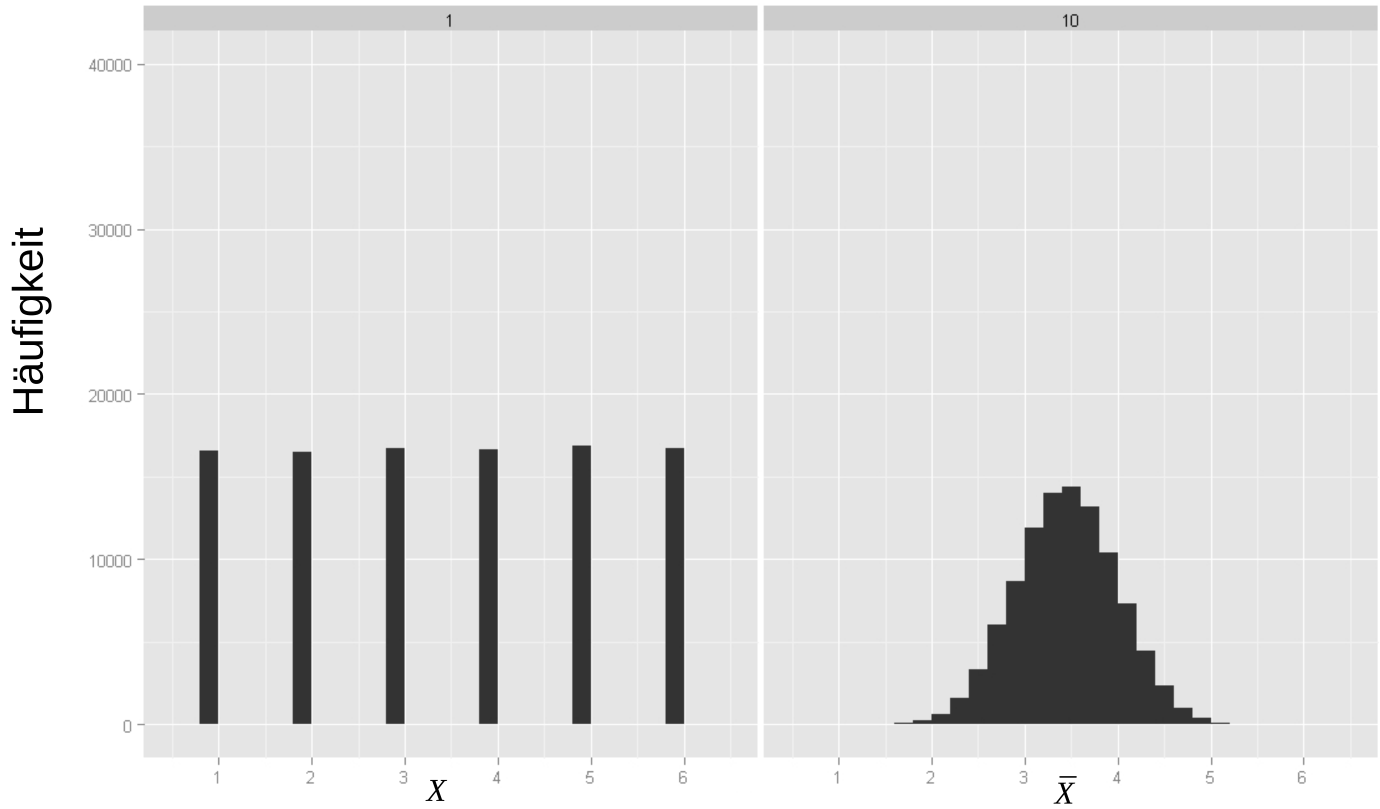
2. Betrachtetes Zufallsexperiment: 10-facher Würfelwurf

- Zufallsvariable: $\overline{X}$ (Mittelwert der Augenzahlen bei mehreren Würfen)
- Frage: Warum liegt beim mehrmaligen Würfelwurf eine Stichprobe vor?

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

100.000 Mal Zufallsexp. 1: Simulierte Verteilung der Zufallsvariablen X

100.000 Mal Zufallsexp. 2: Simulierte Verteilung der Zufallsvariablen $\overline{X}$ (n=10)



<u>Aufgaben:</u>

Tragen Sie E(X) ein!

Vergleichen Sie die Verteilungen!

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

Form der Verteilung:

Für viele Testverfahren sollten die Mittelwerte normalverteilt sein. Dies ist beispielweise gegeben wenn…

- die einzelnen Variablen einer Stichprobe normalverteilt sind,
- die Stichprobe groß genug (n>30) ist. Dann nähert sich die Verteilung der Mittelwerte einer Normalverteilung an (zentraler Grenzwertsatz).

Die Normalverteilung ist durch zwei Parameter charakterisiert:

„Lage“ bzw. Erwartungwert und „Breite“ bzw. Standardabweichung

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

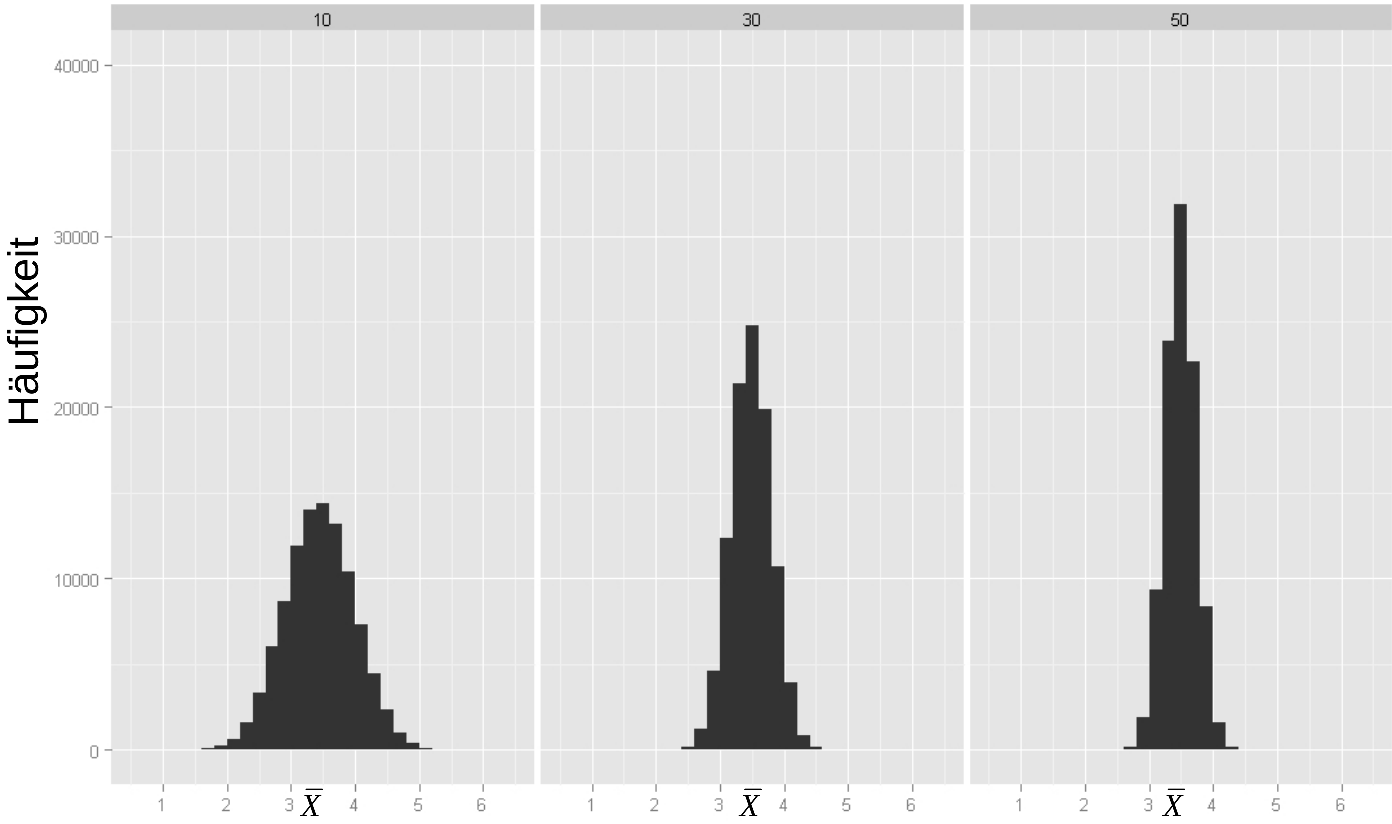
Erwartungswert der Verteilung:

Dieser ist für uns zentral, weil die Hypothese über Erwartungswerte definiert wird. Hierbei wird zunächst von der Nullhypothese ausgegangen (s. 1. Hypothesen).

<u>Aufgabe:</u> Wie würden sich die Verteilungen der letzten Grafik vermutlich ändern, wenn der Würfel gezinkt wäre und bei der Hälfte der Würfe eine 6 fällt?

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

Das zweite Zufallsexperiment wurde variiert: Neben dem Mittelwert von 10 Würfen wurde auch der Mittelwert von 30 und 50 Würfen betrachtet. Wiederum wurden Verteilungen simuliert.



<u>Aufgabe:</u>

Vergleichen Sie die Verteilungen!

Finden Sie eine Erklärung für das Phänomen?

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

Die Standardabweichung der Kennwerteverteilung

(z.B. Standardabweichung der Verteilung der Mittelwerte)

heißt Standardfehler des Kennwertes

(z.B. Standardfehler des Mittelwertes)**.**

In unserem Beispiel beschreibt er, wie sehr die Mittelwerte infolge der Stichprobenziehung schwanken.

Der Standardfehler des Mittelwertes $\sigma_{\bar{X}}$ wird beeinflusst von …

- der Standardabweichung der einzelnen Zufallsvariablen in den Stichproben (je größer die Standardabweichung, desto größer der Standardfehler) und
- der Größe der Stichproben (je größer der Stichprobenumfang n, desto kleiner der Standardfehler).

2. Testverfahren

***t*-Test bei einer Stichprobe**

Voraussetzungen:

- Fragestellung: *E(X)* mit vorgegebenen Wert vergleichen
- EINE Zufallsstichprobe
- Normalverteilung der Zufallsvariablen
  oder ausreichend große Stichprobe

Prüfgröße:

t-Wert

$$t \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$$

Prüfverteilung:

t-Verteilung mit $df = n - 1$

$\bar{X}$ Stichprobenmittelwert

μ_0 Referenzwert

$\hat{\sigma}_X$ Schätzer f. Standardabweichung

n Stichprobengröße

$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$ Schätzer f. Standardfehler

2. Testverfahren

<u>Aufgabe:</u> Für Fragestellung 1 seien folgende Werte gegeben:

Hypothese: H_0: $\mu \geq 20.99$ (einseitige Testung); $\alpha = 5\%$

Daten (n=84): Mittelwert: 20.16; Standardabweichung: 7.78

Prüfgröße: Berechnen Sie den empirischen *t*-Wert.

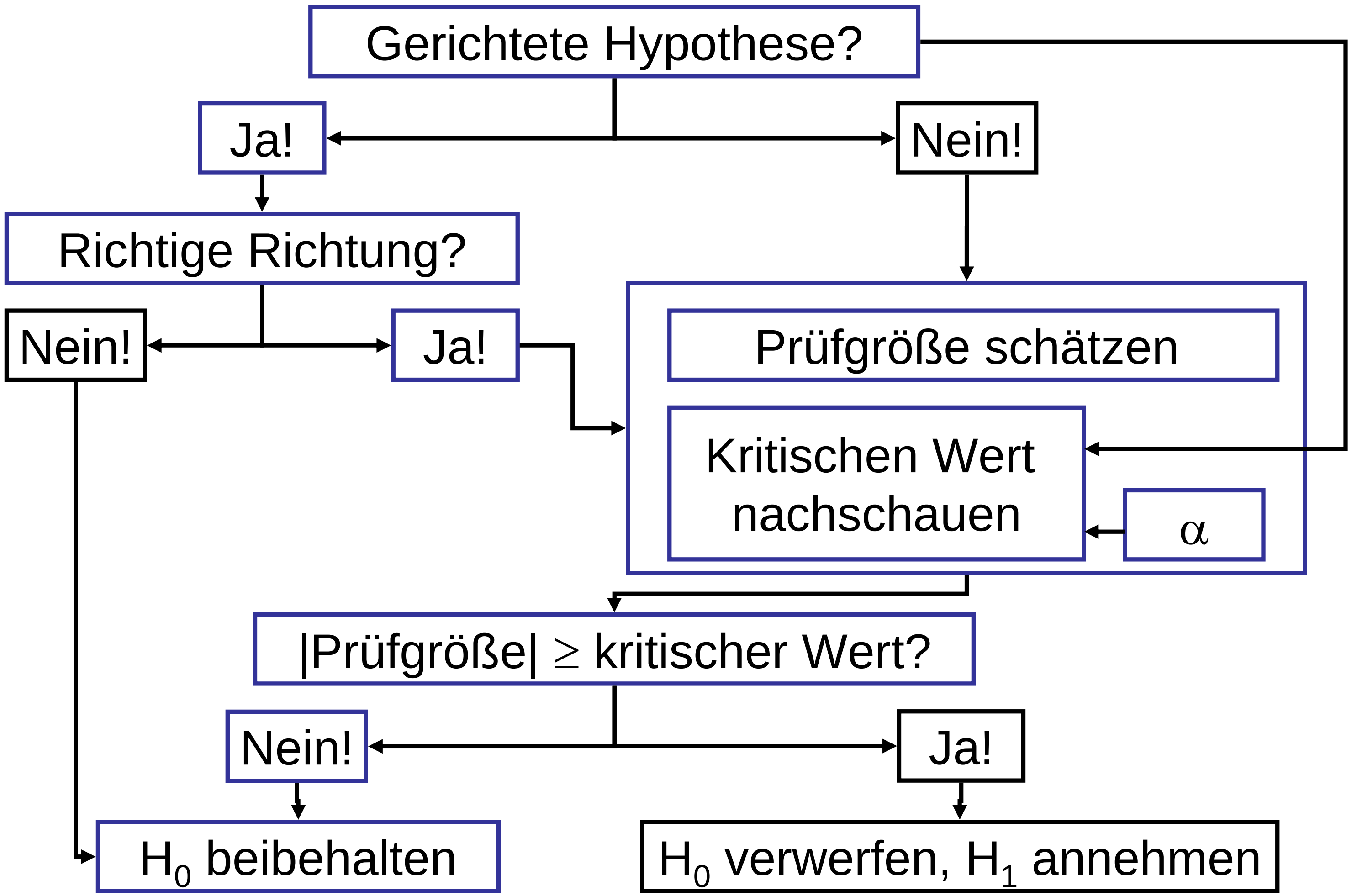
$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$$

Prüfverteilung: Ermitteln Sie den kritischen *t*-Wert (α =5%, einseitig).

$$df = n - 1$$

Vergleich: Skizzieren Sie eine *t*-Verteilung und tragen Sie beide Werte darin ein. Welche Entscheidung würden Sie fällen?

3. Entscheidung



3. Mögliche Entscheidungs-Fehler

In Realität:	H0	H1
Ihre Entscheidung:		
H_0 beibehalten	☺ 1- α	β-Fehler Fehler 2. Art
H_0 verwerfen	α-Fehler Fehler 1. Art	☺ 1- β Teststärke

3. Übungsaufgabe

Folgende Situation sei gegeben:

Hypothese: H_0: $\mu \geq 20.99$ (einseitige Testung); $\alpha = 5\%$

Daten (n=84): Mittelwert: 20.16; Standardabweichung: 7.78

Aufgabe:

Was passiert wenn folgende Aspekte einzeln verändert werden?

1. Der Referenzwert sei 23.
2. Der Mittelwert der Stichprobe sei 25.
3. Die Standardabweichung in der Stichprobe sei halb so groß.
4. Die Anzahl der Personen in der Stichprobe sei doppelt so groß.
5. Das α -Niveau wird auf $\alpha = 1\%$ verringert.
6. Es findet eine zweiseitige Testung statt.

4. *t*-Test bei einer Stichprobe in SPSS

Es gibt zwei Möglichkeiten

1. Via Menü
2. Via Syntax

Beachte:

- SPSS prüft generell nur **un**gerichtete Hypothesen!

Vorgehen bei gerichteten Hypothesen

1. Von Hand prüfen, ob die Richtung der „mittlere Differenz“ stimmt.
2. *p*-Wert anhand des ausgegebenen *t*-Wertes selbst ermitteln oder <u>den ausgegebenen *p*-Wert halbieren</u> oder das α-Niveau verdoppeln

Hinweis:

SPSS-Interaktiv

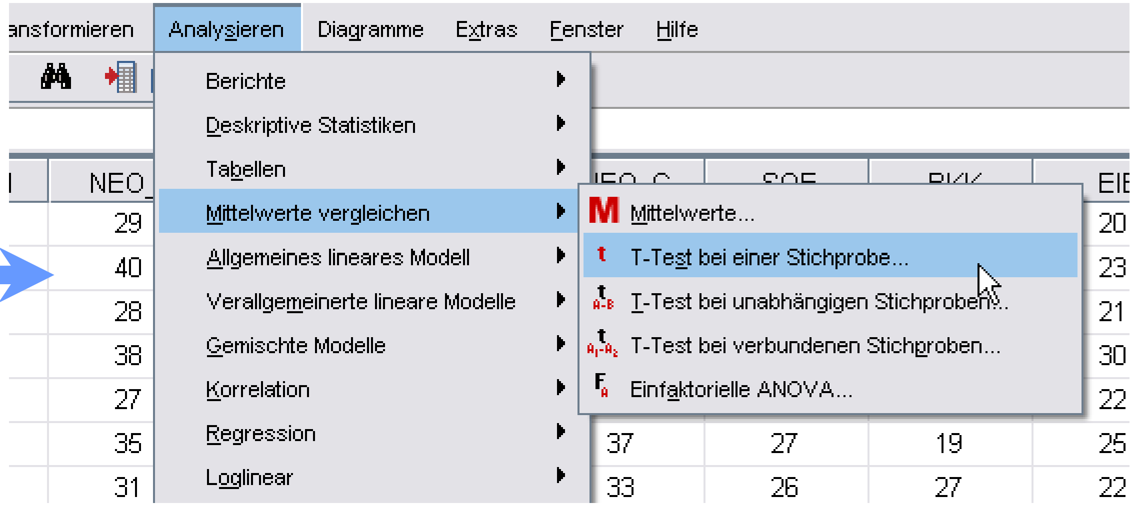
http://www.metheval.uni-jena.de/projekte/spss-interaktiv/spss-interaktiv.php

Klick-Anleitungen und kommentierte Outputs für SPSS

4. *t*-Test bei einer Stichprobe in SPSS

Via Menü

1. Analysemethode im Menü auswählen



2. Variable auswählen

3. Testwert eingeben

4. *t*-Test bei einer Stichprobe in SPSS

Via Syntax

Zu testende Variable angeben

Testwert festlegen. Default ist 0.

α-Niveau festlegen. Default ist .95 bei α =5%

Umgang mit Missings festlegen. Default ist fallweiser Ausschluss

```
T-TEST
   /VARIABLES=     NEO_N
   /TESTVAL =      20.99
   /CRITERIA =     CI(.95)
   /MISSING =      ANALYSIS .
```

Punkt als Befehlsabschluss nicht vergessen

4. *t*-Test bei einer Stichprobe in SPSS

$n = 84$ $\bar{X} = 20.16$ $SD = \hat{\sigma} = 7.778$ $SE = \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{7.778}{\sqrt{84}} \approx 0.849$

Statistik bei einer Stichprobe

	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Neurotizismus	84	20,16	7,778	,849

$\mu = 20.99$

Label für *X*

Test bei einer Sichprobe

	Testwert = 20.99					
					95% Konfidenzintervall der Differenz	
	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Untere	Obere
Neurotizismus	-,982	83	,329	-,833	-2,52	,85

$\bar{X} - \mu_0 = 20.16 - 20.99 = -0.833$

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{20.16 - 20.99}{0.849} \approx -0.982$

$p = 0.329$

$df = n - 1 = 84 - 1 = 83$

4. *t*-Test bei einer Stichprobe in SPSS

Übung zum Output

$SE =$

Statistik bei einer Stichprobe

	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Extraversion	84	30,45	6,507	

Test bei einer Sichprobe

	Testwert = 26.88					
					95% Konfidenzintervall der Differenz	
	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Untere	Obere
Extraversion					2,15	4,98

$t =$ $df =$ $p =$ $\bar{X} - \mu_0 =$

4.a Exkurs: *t*-Verteilung

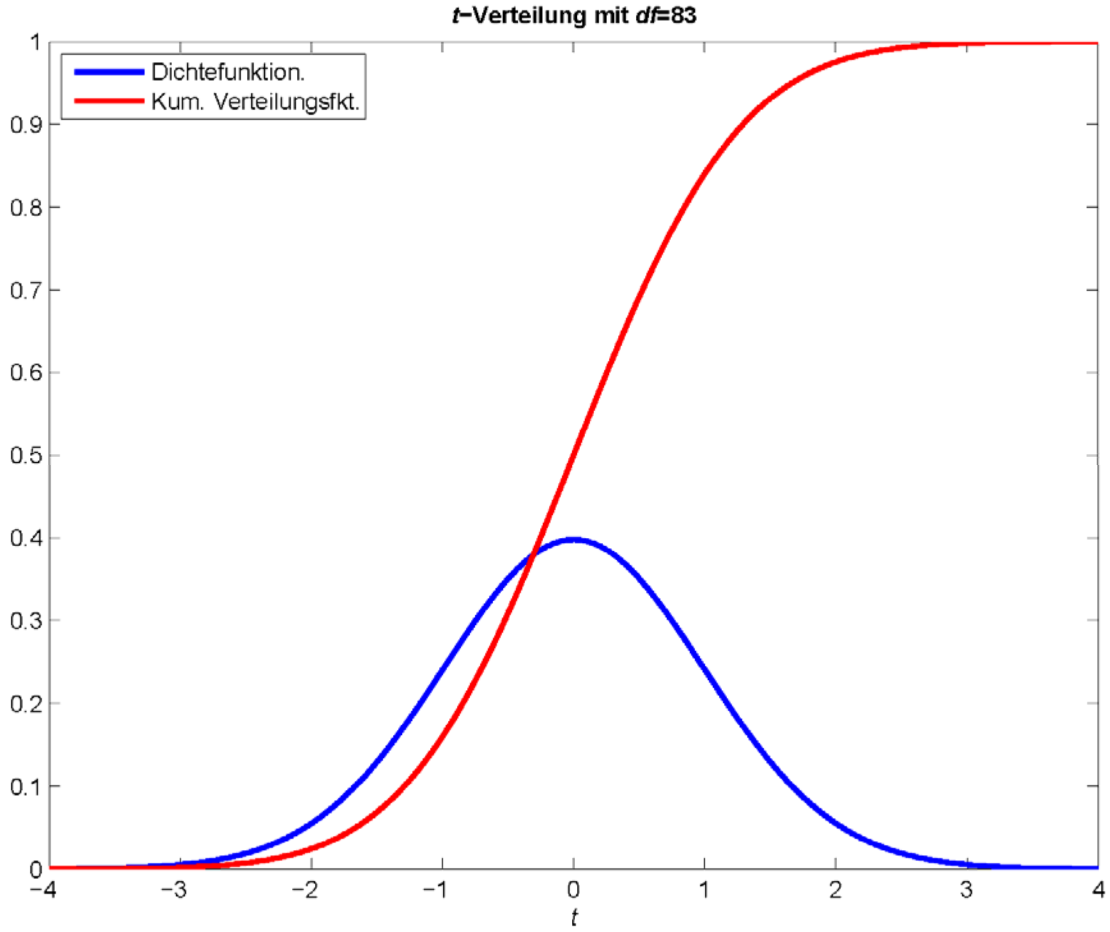
Wissenswertes:

- auch Student-*t*-Verteilung
- 1908 von William Sealey Gosset entwickelt
- unter dem Pseudonym „Student“ veröffentlicht

Kennwerte der Verteilung

$$E(X) = 0$$

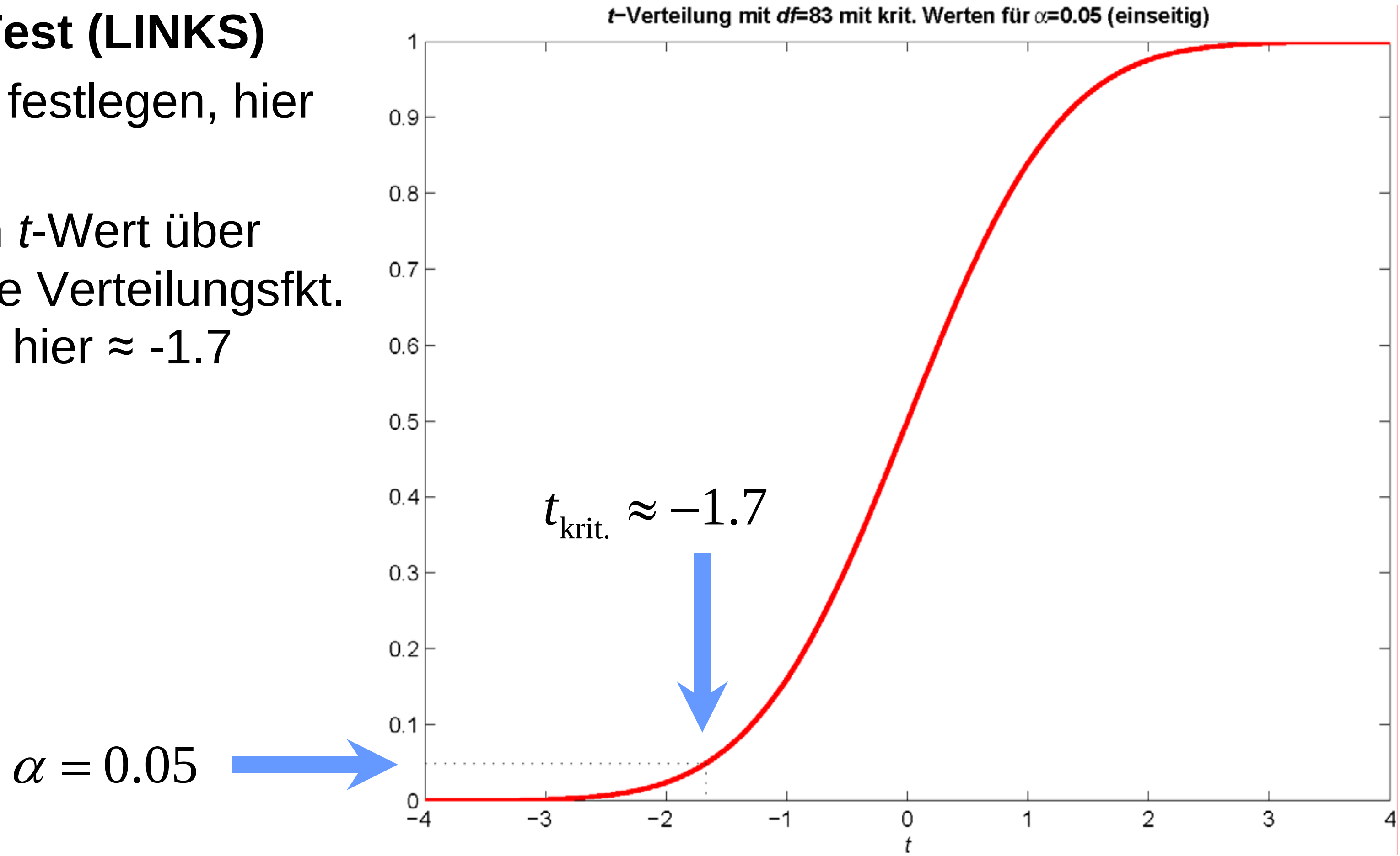
$$Var(X) = \frac{df}{df-2}$$



4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Einseitiger Test

Einseitiger Test (LINKS)

1. α-Niveau festlegen, hier α=0.05
2. kritischen *t*-Wert über kumulierte Verteilungsfkt. ermitteln, hier ≈ -1.7



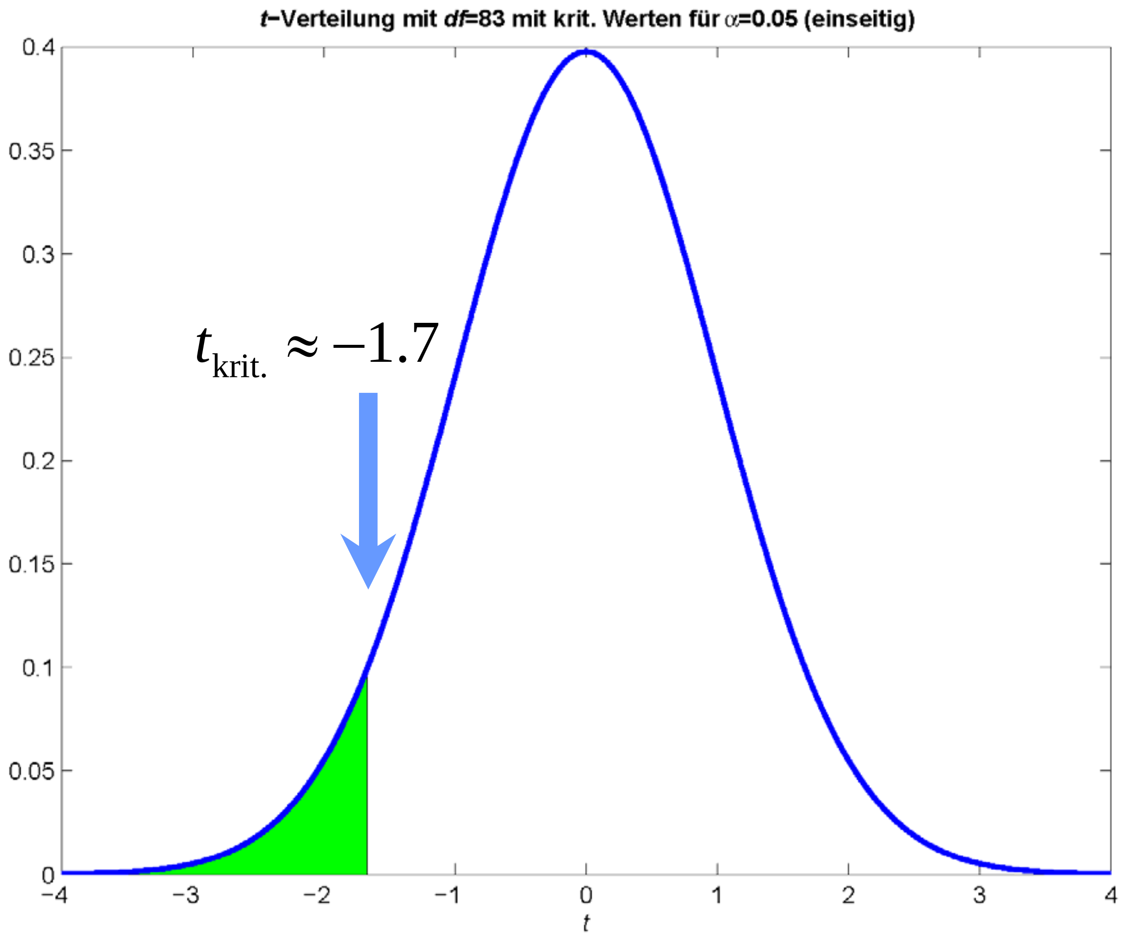
4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Einseitiger Test

Einseitiger Test (LINKS)

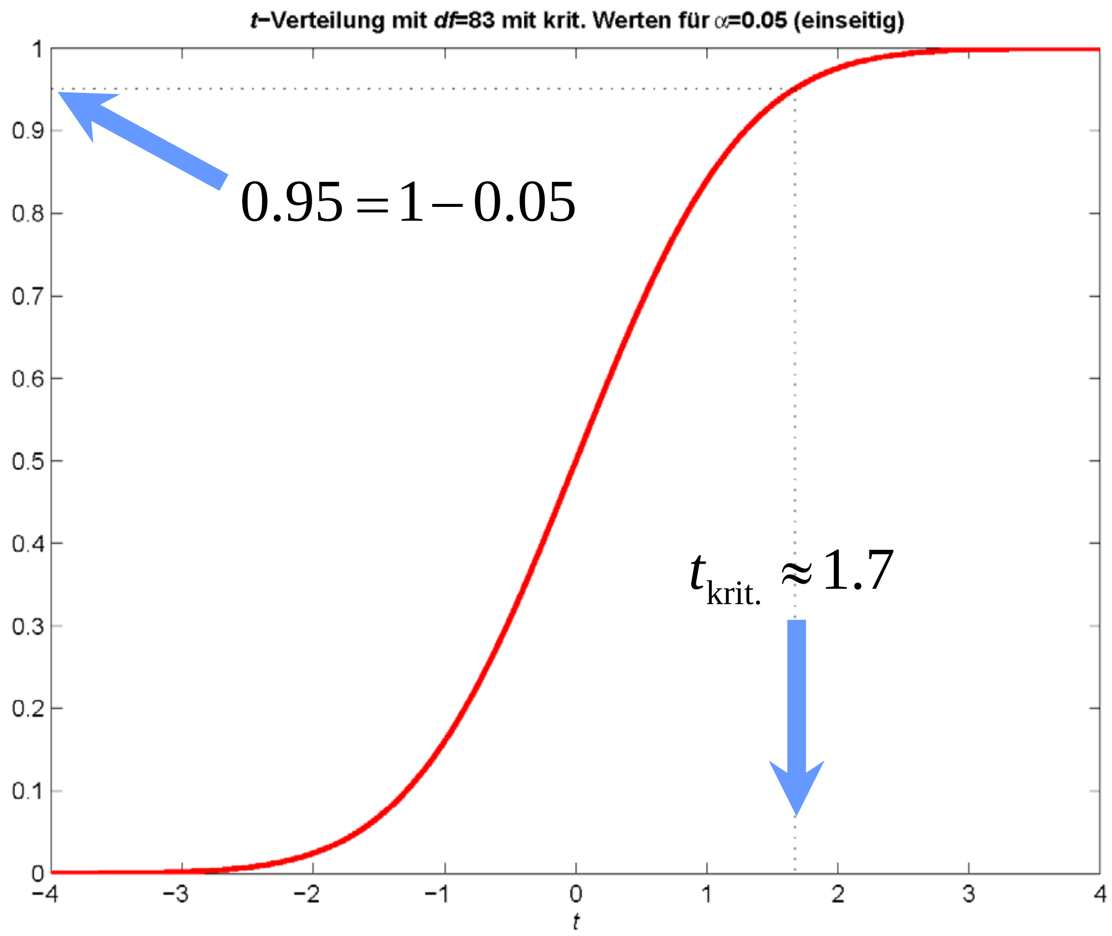
3. Liegt der ermittelte t-Wert im „grünen“ Bereich?

Fragen

- Wie groß ist die grüne Fläche?
- Welchen Zusammenhang gibt es zwischen kumulierter Verteilungsfkt. und der grünen Fläche?
- H_0 verwerfen bei
  a) t = -0.982 b) t = 5.024?



4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Einseitiger Test



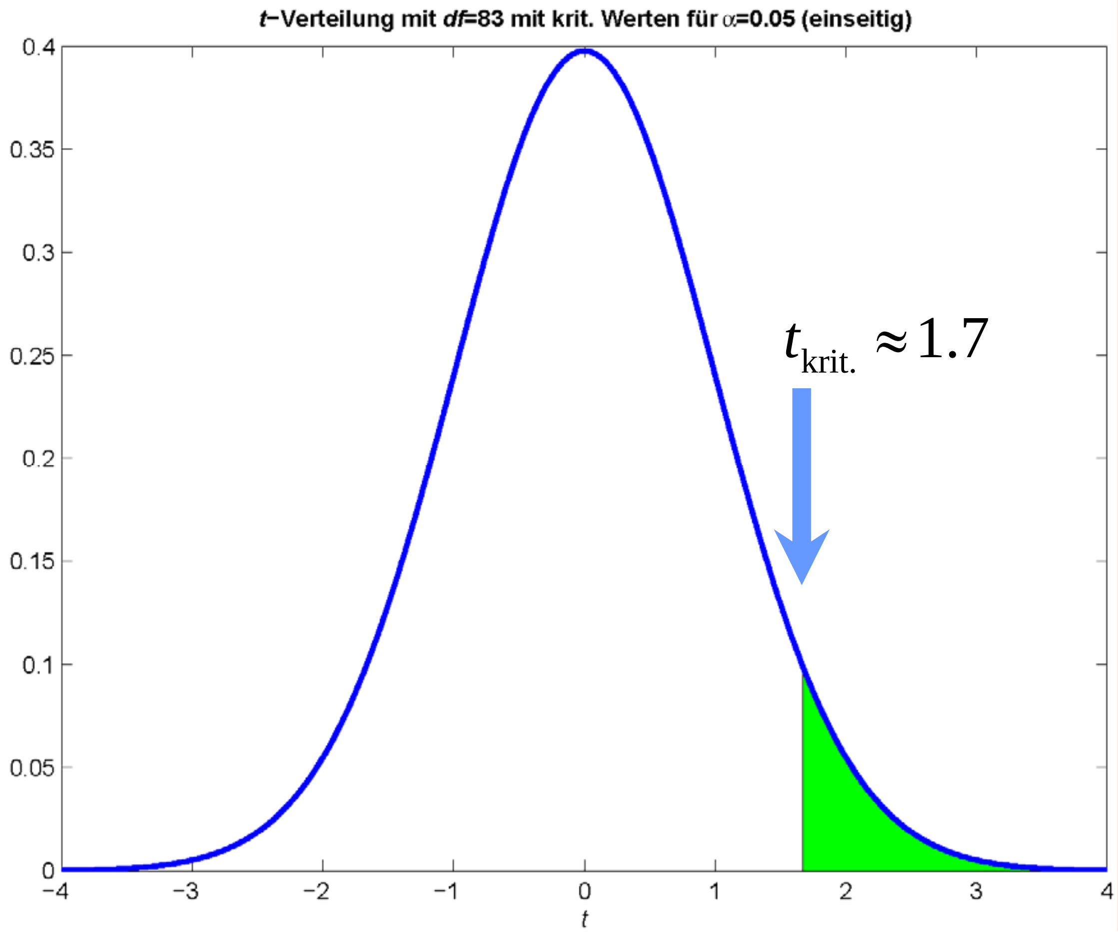
Einseitiger Test (RECHTS)

- kritischen *t*-Wert über kumulierte Verteilungsfkt. ermitteln
- bei rechtsseitigen Test immer 1 minus alpha
- Ob links- oder rechts-seitiger Test, ergibt sich aus der Hypothese.

R: $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$

L: $\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$

4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Einseitiger Test



Einseitiger Test (RECHTS)

- Bei einseitigen Tests ist die Richtung zu beachten!
- Danach richtet sich, ob der kritische *t*-Wert positiv oder negativ ist.

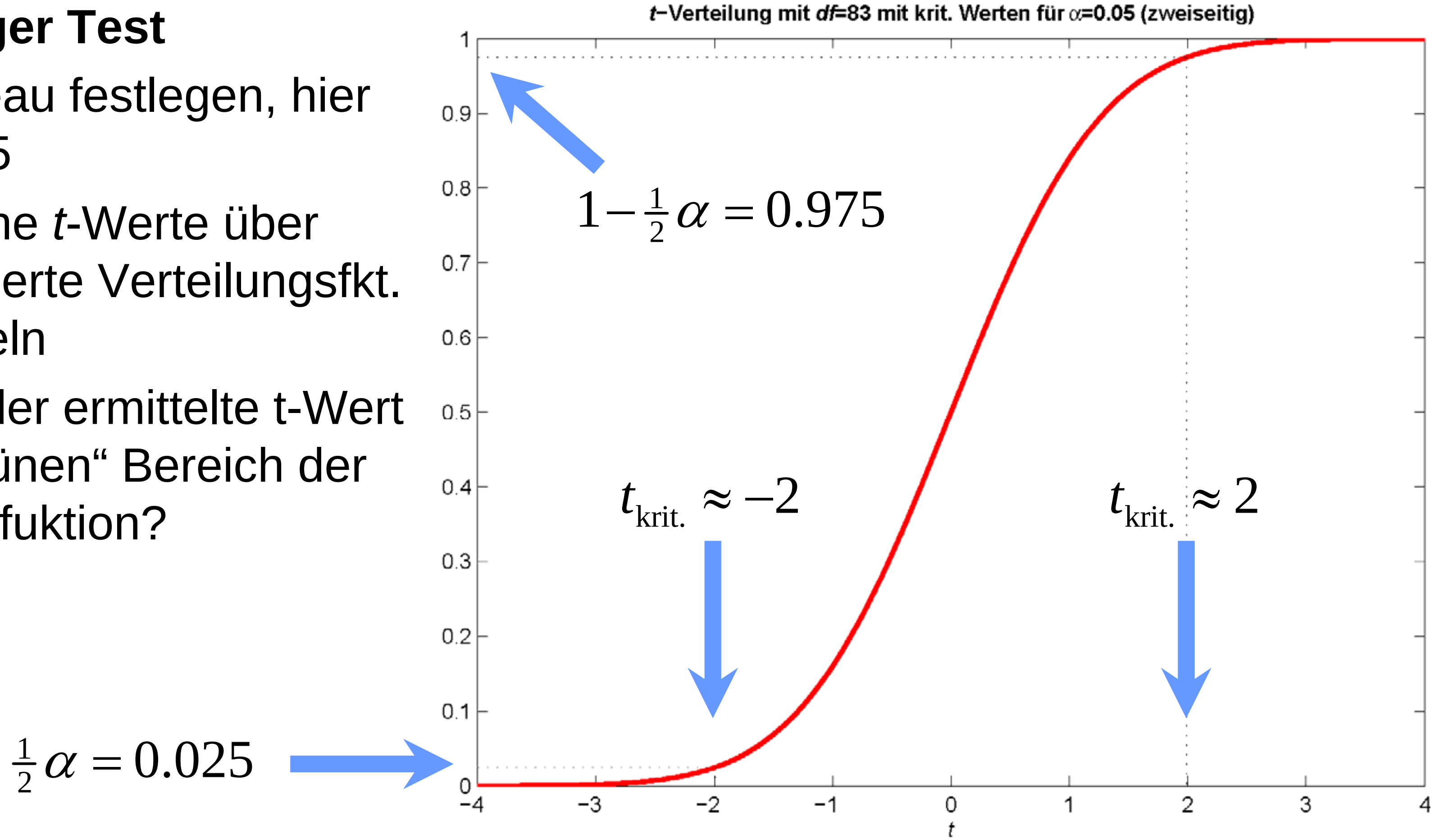
Frage

- H_0 ablehnen bei
  a) t = -0.982 b) t = 5.024?

4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Zweiseitiger Test

Zweiseitiger Test

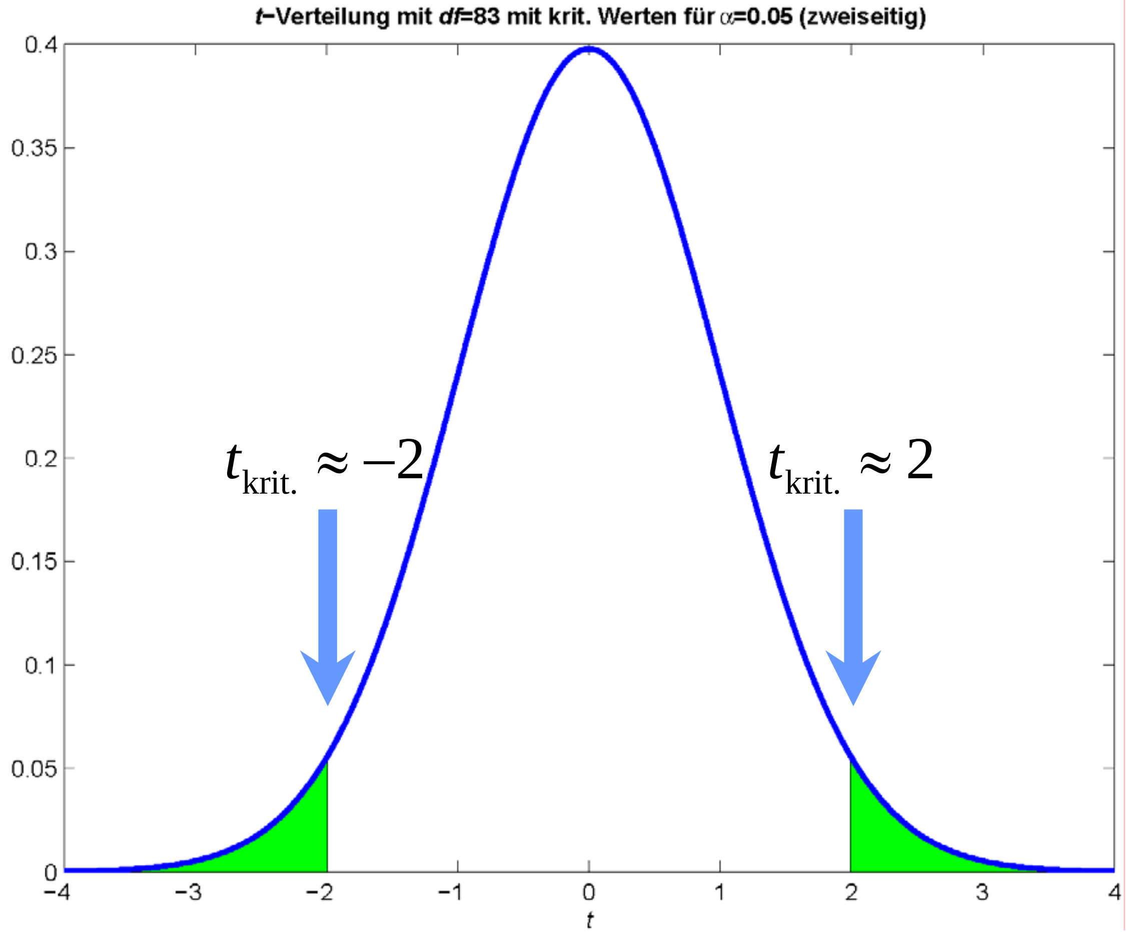
1. α-Niveau festlegen, hier α=0.05
2. kritische *t*-Werte über kumulierte Verteilungsfkt. ermitteln
3. Liegt der ermittelte t-Wert im „grünen" Bereich der Dichtefuktion?



4.a Exkurs: *t*-Verteilung: Zweiseitiger Test

Fragen

- Wie groß ist die grüne Fläche?
- H_0 verwerfen bei
  a) $t = -0.982$ b) $t = 5.024$?
- Ist $\left|t_{\text{krit.}}\right|$ bei gleichem *df* und α-Niveau beim ein- oder zweiseitigen Test größer?



Hinweis:

Datenerhebung

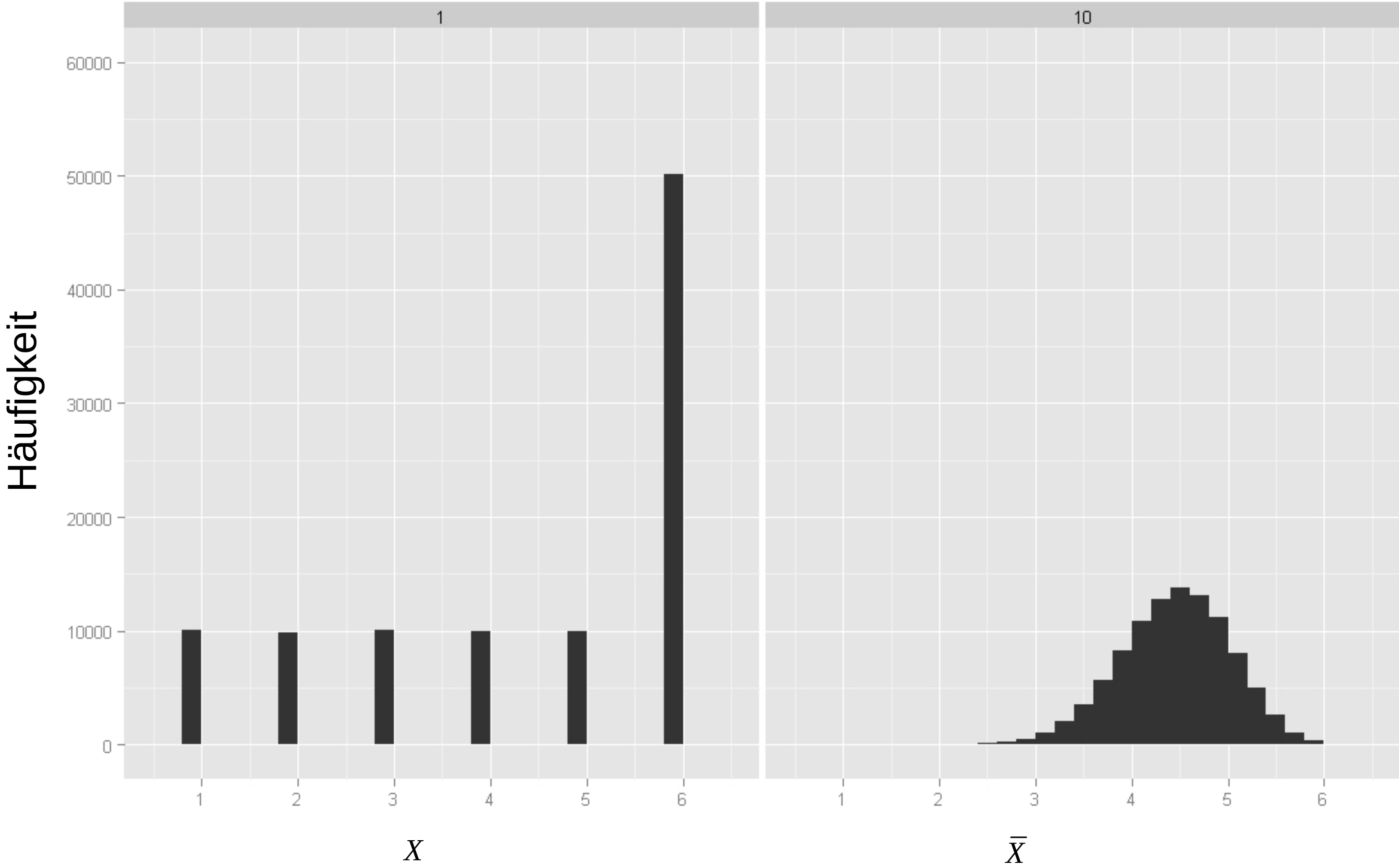
→ Ziel: Verwendung von Daten in der Übung zu Demonstrationszwecken

→ Bitte nehmen Sie an der Erhebung teil!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

Ein unfairer Würfel:



2.a Exkurs: Verteilung v. Mittelwerten

Ein unfairer Würfel mit den verschiedenen Stichprobengrößen