Übung zur Vorlesung -
Theorien Psychometrischer Tests II

N. Rose

9. Übung (15.01.2009)

- **Agenda**
  - 3-parametrisches logistisches Modell nach Birnbaum
  - Linkfunktionen

3PL-Modell nach Birnbaum

- Modellgleichung

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \gamma_i + (1-\gamma_i)\frac{\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}{1+\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}$$

- **Modellparameter:**
  1. Personenparameter = latente Variable ξ (Fähigkeit, …)
  2. Itemparameter:
     - ➔ β_i Itemschwierigkeit
     - ➔ α_i Itemdiskriminationsparameter
     - ➔ γ_i unter Asymptote/Rateparameter

3PL-Modell

- Die Interpretation des Parameters γ_i im 3PL-Modell ist in der Literatur nicht einheitlich! Welche Charakterisierung dieses Parameters ohne weitere inhaltliche Interpretation ist in jedem Falle richtig?

  A: γ_i ist die untere Asymptote (der Wert gegen den die Lösungswahrscheinlichkeit mit zunehmend geringeren Werten der latenten Variable ξ konvergiert).

- Warum handelt es sich beim 3PL-Modell genau genommen nicht um ein Modell mit einer latenten Variable?

  A: Die Lösungswahrscheinlichkeit eines Items hängt nicht ausschließlich von der latenten Variable ξ ab, sondern auch von anderen Lösungsstrategien (z. B. Raten).

3PL-Modell

- Was muss bei der Interpretation aller 3 Itemparameter im 3PL-Modell beachtet werden? Erläutern Sie die Zusammenhänge am Bsp. der Itemschwierigkeit.

A: Die 3 Itemparameter sind nicht unabhängig voneinander!

Folge: Die Itemschwierigkeit ist nicht länger die Ausprägung von ξ, bei der die Lösungswahrscheinlichkeit 0.5 beträgt.

Die Interpretation ist vom Rateparameter γ_i eines Items abhängig.

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi = \beta_i\right) = 0.5 + \frac{\gamma_i}{2}$$

3PL-Modell

- Ist der Logit linear in ξ?

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \gamma_i + (1-\gamma_i)\frac{\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}{1+\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}$$

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) - \gamma_i = (1-\gamma_i)\frac{\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}{1+\exp[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}$$

$$\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi) - \gamma_i}{1-\gamma_i} = \frac{1}{1+\exp-[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]}$$

$$\frac{1-\gamma_i}{P(Y_i = 1 \mid \xi) - \gamma_i} = 1+\exp-[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]$$

$$\frac{1-\gamma_i}{P(Y_i = 1 \mid \xi) - \gamma_i} - 1 = \exp-[\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)]$$

3PL-Modell

- Fortsetzung:

$$\frac{1-\gamma_i}{P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i}-1=\exp-\left[\alpha_i\cdot(\xi-\beta_i)\right]$$

$$\frac{1-\gamma_i-\left[P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i\right]}{P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i}=\exp-\left[\alpha_i\cdot(\xi-\beta_i)\right]$$

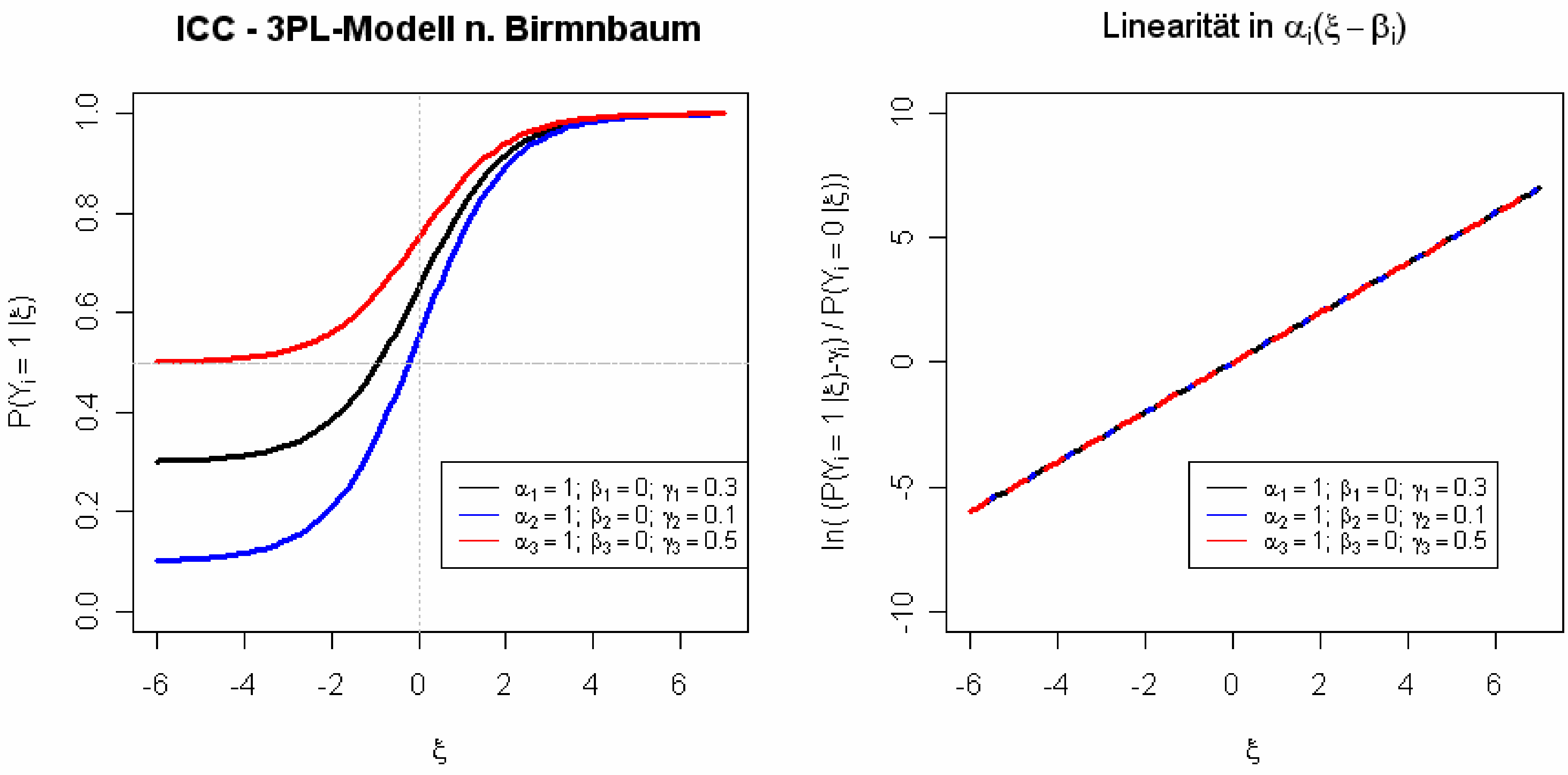
$$\frac{1-P(Y_i=1\,|\,\xi)}{P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i}=\exp-\left[\alpha_i\cdot(\xi-\beta_i)\right]$$

$$\frac{P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i}{P(Y_i=0\,|\,\xi)}=\exp\left[\alpha_i\cdot(\xi-\beta_i)\right]$$

$$\ln\left(\frac{P(Y_i=1\,|\,\xi)-\gamma_i}{P(Y_i=0\,|\,\xi)}\right)=\alpha_i\cdot(\xi-\beta_i)$$

3PL-Modell

- graphische Veranschaulichung, dass die Logits NICHT linear sind in ξ!



3PL-Modell

- Welchen Einfluss hat die untere Asymptote auf die Genauigkeit der Personenparameterschätzung?

A: Zunehmend höhere Werte von γ_i bedeuten geringere Werte auf der Informationsfunktion, folglich höhere Standardfehler und geringere Schätzgenauigkeit.

Linkfunktionen

- Warum braucht es in den Modellen der Item-Response Theorie (als auch in Generalisierten Linearen Modellen) Linkfunktionen?

  A: Sind die manifesten (abhängigen) Variablen nicht normalverteilt und haben einen beschränkten Wertebereich, kann die regressive Abhängigkeit zwischen dem metrischen Prädiktor zumeist nicht linear sein.

  ABER: Die Linearkombination der Prädiktoren kann mittels Response-/Linkfunktion mit der manifesten (abhängigen) Variablen verknüpft werden.

Linkfunktionen in der IRT

- Welche beiden Linkfunktionen aus der IRT kennen sie? Warum werden gerade diese verwand? Beschreiben sie die beiden Funktionen!

A: Probit und Logit als Linkfunktionen (und kumulierte Standardnormalverteilung / logistische Verteilungsfunktion als Responsefunktionen).

A: Probit und Logit sind zwischen minus und plus unendlich definiert, wie die Variable ξ (Prädiktor).

A: Die Funktionswerte der kumulierte Standardnormalverteilung / logistische Verteilungsfunktion sind zwischen Null und definiert, entsprechend dem Definitionsbereich der Regression einer dichotomen abhängigen Variable.

Probit vs. Logit

- **Linearität von Logit und Probit in ξ:**

1. Probit

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \Phi\left[\alpha_i^{\text{probit}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{probit}}\right)\right]$$

$$\Phi^{-1}\left[P(Y_i = 1 \mid \xi)\right] = \alpha_i^{\text{probit}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{probit}}\right)$$

2. Logit

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \frac{\alpha_i^{\text{logistic}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{logistic}}\right)}{1 + \alpha_i^{\text{logistic}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{logistic}}\right)}$$

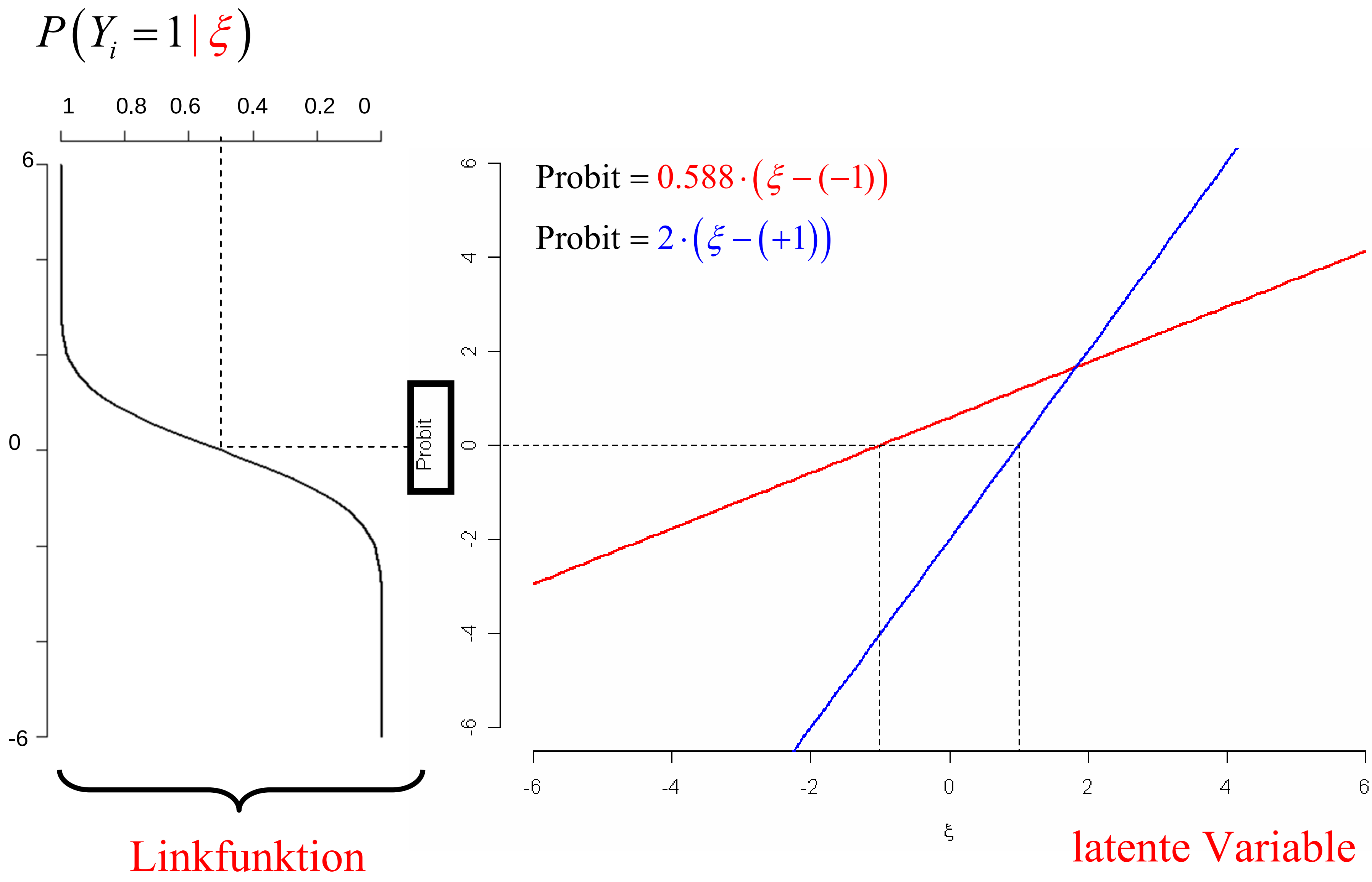
$$\ln\left(\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}\right) = \alpha_i^{\text{logistic}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{logistic}}\right)$$

Linkfunktionen in der IRT

- Beachte: Die Annahme einer sigmoiden Funktion zur Beschreibung einer regressiven Abhängigkeit zwischen einem metrischen Prädiktor und einer dichotomen abhängigen Variable kann falsch sein!

➔ Der Werte-/Definitionsbereich der Variablen im Modell ist nicht hinreichend bei der Wahl des Modells!

Linkfunktionen in der IRT



Linkfunktionen in der IRT

- Wozu braucht es den Umrechnungsfaktor 1.7 bei Probit- und Logitmodellen.

  A: Bei einer gegebenen regressiven Abhängigkeit zwischen einer dichotomen und einer metrischen Variable unterscheiden sich die Itemdiskriminationen um den Faktor 1.7.

$$\alpha_i^{logistic} = 1.7 \cdot \alpha_i^{probit}$$

  Beachte: Die unterschiedlichen Diskriminationen in der Probit- und der Logit-Metrik bedeuten nicht verschiedene regressive Abhängigkeiten!

Linkfunktionen in der IRT

- Ausblick:
  - nicht nur die Itemparameter von Probit- und Logitmodellen können ineinander umgerechnet werden
  - die Parameter beider Modelle können auch in Faktorladungen, Measurement Intercepts und Schwellenparameter spezieller Strukturgleichungsmodelle umgerechnet werden
  - Vorteile: Prüfung von 2-parametrischen IRT-Modellen in SEM möglich!