Übung zur Vorlesung -
Theorien Psychometrischer Tests II

N. Rose

12. Übung (05.02.2009)

Agenda

- **Agenda**
  - Datenbsp. „scalefactors.dat“
    - Berechnen der Varianzen der Latent Response Variablen
    - Berechnen der modellimplizierten Var.-Kov.-Struktur/ Korrelationsstruktur
  - Partial Credit Modell
    - Berechnen der Kategorienwahrscheinlichkeiten
  - Modellerweiterung um erklärende Variablen

Skalierungsfaktoren in Mplus

- Was sind die Skalierungsfaktoren in M*plus*?

  A: Die Skalierungsfaktoren sind die Kehrwerte der Standardabweichungen der Latent Response Variablen

$$sf_i = \frac{1}{Std\left(Y_i^*\right)}$$

- Wozu werden Sie verwendet?

  A: Die Skalierungsfaktoren werden verwendet, um die Varianz-Kovarianzmatrix in eine Korrelationsmatrix umrechnen zu können.

$$\Sigma^*_{Kor} = \Delta \Sigma^*_{Kov} \Delta$$

  A: Die freie Schätzung der Skalierungsfaktoren erlaubt es, dass die Varianzen der Latent Response Variable größer/kleiner 1 sein kann!

Skalierungsfaktoren in Mplus

- ... dabei ist Δ eine Diagonalmatrix mit den Skalierungsfaktoren in der Diagonale:

$$\mathbf{\Sigma}^{*}_{Kor} = \mathbf{\Delta}\mathbf{\Sigma}^{*}_{Kov}\mathbf{\Delta}$$

$$\mathbf{\Sigma}^{*}_{Kor} = \begin{pmatrix} sf_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sf_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} sf_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sf_k \end{pmatrix}$$

Skalierungsfaktoren in Mplus

- Berechnung der Skalierungsfaktoren: $sf_i = \frac{1}{Std\left(Y_i^*\right)}$

$$sf_i = \frac{1}{\sqrt{Var\left(Y_i^*\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Var\left(\nu_i + \lambda_i \xi + \varepsilon_i\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 \cdot Var\left(\xi\right) + Var\left(\varepsilon_i\right)}}$$

Modellimplizierte Korrelationsstruktur

- Berechnung der modellimplizierten tetrachorischen/polychorischen Korrelationsstruktur!

A: Zunächst wird die modellimplizierte Varianz-Kovarianzstruktur berechnet (Bsp.):

$$
\begin{aligned}
Cov\left(Y_{12}^{*}, Y_{22}^{*}\right) &= Cov\left(\nu_{2} + \lambda_{1}\xi_{2} + \varepsilon_{12}, \nu_{1} + \lambda_{2}\xi_{2} + \varepsilon_{22}\right) \\
&= \lambda_{12}\lambda_{22} Var\left(\xi_{2}\right)
\end{aligned}
$$

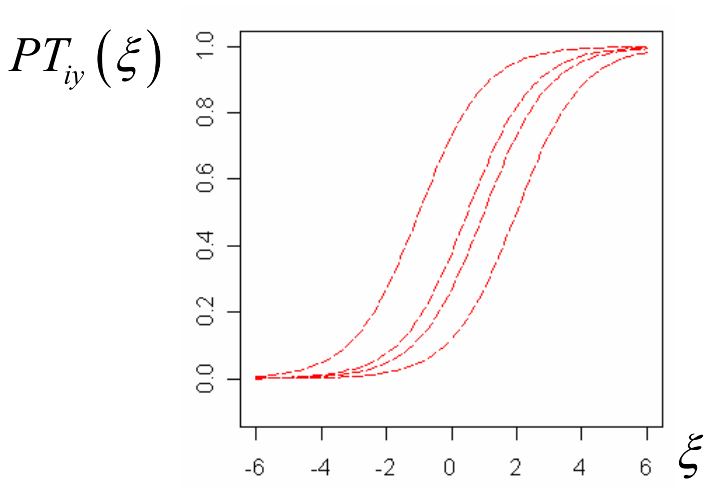
A: Nachfolgende Umrechnung in die modellimplizierten Korrelationen:

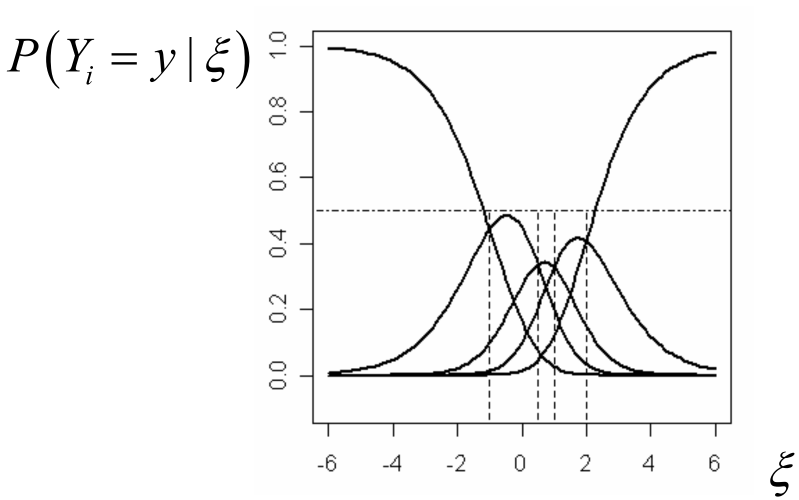
$$
\begin{aligned}
Kor\left(Y_{12}^{*}, Y_{22}^{*}\right) &= \frac{Cov\left(Y_{12}^{*}, Y_{22}^{*}\right)}{Std\left(Y_{12}^{*}\right) \cdot Std\left(Y_{22}^{*}\right)} = \frac{1}{Std\left(Y_{12}^{*}\right)} \cdot \frac{1}{Std\left(Y_{22}^{*}\right)} \cdot Cov\left(Y_{12}^{*}, Y_{22}^{*}\right) \\
&= sf_{12} \cdot sf_{22} \cdot Cov\left(Y_{12}^{*}, Y_{22}^{*}\right)
\end{aligned}
$$

Modelle für ordinale Variablen

- Was ist der Unterschied zwischen Schwellenwahrscheinlichkeiten und Kategorienwahrscheinlichkeiten?

  A: Schwellenwahrscheinlichkeiten geben die Wahrscheinlichkeit an in der Größeren zweier benachbarter Kategorien zu antworten! Kategorienwellenwahrscheinlichkeiten geben die Wahrscheinlichkeit an in einer bestimmten Kategorie zu antworten, gegeben aller Kategorien des jeweiligen Items!



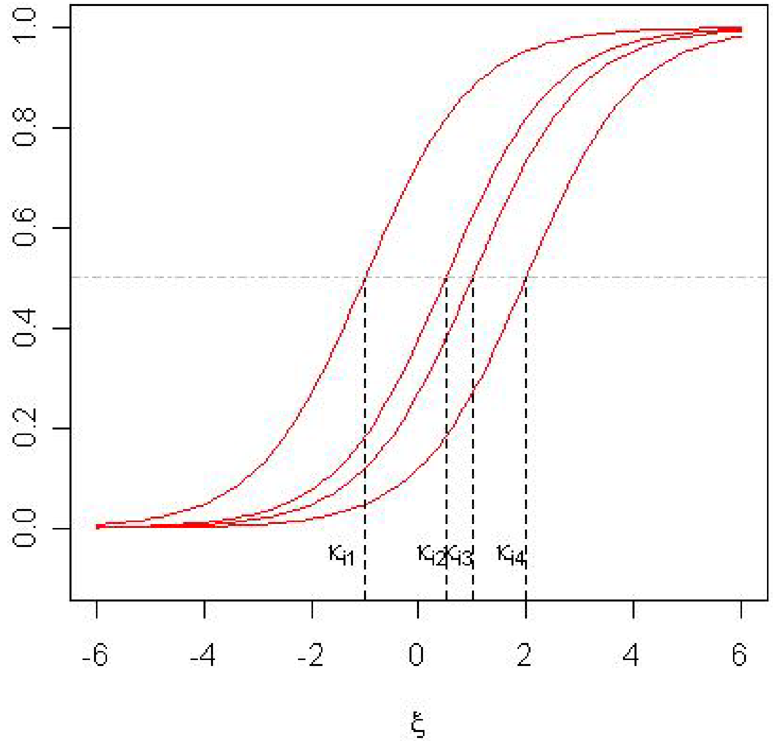


Partial Credit Modell

- Wie ist das Rasch-Modell für dichotome Variablen und das Partial Credit Modell (*PCM*) theoretisch verknüpft?

  A: Die Schwellenwahrscheinlichkeiten im PCM lassen sich mit der Modellgleichung des Raschmodells beschreiben!

$$PT_{iy}(\xi) = \frac{\exp(\xi - \kappa_{iy})}{1 + \exp(\xi - \kappa_{iy})}$$



Partial Credit Modell

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten $P(Y_i = 2|\xi)$, bei einem 4-kategoriellen Item, anhand der Modellgleichung:

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{y}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp \sum_{j=1}^{c}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}$$

Beachte: doppeltes Summenzeichen!

$$P\left(Y_i = 2 \mid \xi\right) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{2}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{3} \exp \sum_{j=1}^{c}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}$$

Partial Credit Modell

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten $P(Y_i = 2|\xi)$, bei einem 4-kategoriellen Item, anhand der Modellgleichung:

$$P\left(Y_i = 2 \mid \xi\right) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{2} \left(\xi - \kappa_{ij}\right)}{\left(\begin{array}{l} 1 + \exp \sum_{j=1}^{1} \left(\xi - \kappa_{ij}\right) \\ \quad + \exp \sum_{j=1}^{2} \left(\xi - \kappa_{ij}\right) \\ \quad + \exp \sum_{j=1}^{3} \left(\xi - \kappa_{ij}\right) \end{array}\right)}$$

Partial Credit Modell

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten $P(Y_i = 2|\xi)$, bei einem 4-kategoriellen Item, anhand der Modellgleichung:

$$P\left(Y_i = 2 \mid \xi\right) = \frac{\exp\left[\cancel{\left(\xi - \kappa_{i0}\right)} + \left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right)\right]}{1 + \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right)\right] + \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right)\right] + \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right) + \left(\xi - \kappa_{i3}\right)\right]}$$

$$\mid \sum_{j=0}^{0} \left(\xi - \kappa_{i0}\right) = 0$$

Partial Credit Modell

- äquivalente Modellgleichung des *PCM*:

$$P(Y_i = 2 \mid \xi) = \frac{\exp\left[\cancel{(\xi - \kappa_{i0})} + 2 \cdot \xi - \kappa_{i1} - \kappa_{i2}\right]}{\begin{aligned}1 &+ \exp\left[\xi - \kappa_{i1}\right] \\ &+ \exp\left[2 \cdot \xi - \kappa_{i1} - \kappa_{i2}\right] \\ &+ \exp\left[3 \cdot \xi - \kappa_{i1} - \kappa_{i2} - \kappa_{i3}\right]\end{aligned}} \qquad \Big| \sum\nolimits_{j=0}^{0} (\xi - \kappa_{i0}) = 0$$

$$P(Y_i = y \mid \xi) = \frac{\exp\left(y \cdot \xi - \sum\nolimits_{j=0}^{y} \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum\nolimits_{c=1}^{C} \exp\left(c \cdot \xi - \sum\nolimits_{j=0}^{c} \kappa_{ij}\right)}$$

Graded Response Model

- Was ist der Unterschied zwischen Generalized Partial Credit Model (*GPCM*) und Graded Response Model?

  A: Das *GPCM* ist ein direktes IRT-Modell, während das *GRM* ein indirektes IRT-Modell ist!

  A: Die Modellgleichung in direkten IRT-Modellen gibt die Berechnungsvorschrift zum Errechnen der Kategorienwahrscheinlichkeiten wieder. Bei indirekten IRT-Modellen ist die Kategorienwahrscheinlichkeit eines Items in mehreren Schritten (*indirekt*) zu berechnen.

Graded Response Model

- Was gibt die Modellgleichung des Graded Response Model an?

  A: Die Modellgleichung des *GRM* ist die mathematische Repräsentation der Operation Characteristic Curves (*OCC*). Sie geben an wie wahrscheinlich es ist, **mindestens** in einer Kategorie y zu antworten: $P(Y_i \geq y | \xi)$

- Wie werden im GRM die Kategorienwahrscheinlichkeiten berechnet?

  A: Die Kategorienwahrscheinlichkeiten $P(Y_i = y | \xi)$ werden im GRM als Differenzen der *OCC* berechnet (Ausnahme: niedrigste und höchste Kategorie!).

Graded Response Model

- Allgemeine Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten im *GRM* für ein Item Y_i mit C - 1 Kategorien:

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = P\left(Y_i \geq y \mid \xi\right) - P\left(Y_i \geq y+1 \mid \xi\right)$$

$$P\left(Y_i = C \mid \xi\right) = P\left(Y_i \geq C \mid \xi\right)$$

$$P\left(Y_i = 0 \mid \xi\right) = 1 - P\left(Y_i \geq 0 \mid \xi\right)$$

Latent Class Analysis (*LCA*)

- Wann ist die Verwendung einer LCA in der Testkonstruktion sinnvoll?

  A: Zur Modellgeltungskontrolle von rational konstruierten Tests zur Erhebung von latenten Typen (latenten diskreten Variablen).

- Welches sind die Grundideen der LCA?

  A: (1) diskrete, **nominalskalierte latente Variable**; (2) **klassenspezifische** Lösungswahrscheinlichkeiten/**Itemprofile**; (3) **klassenspezifische Itemparameter**

- Welches sind die Grundannahmen der LCA?

  A: (1) Stufen der latenten Variable (latente Klassen) sind **disjunkt und exhaustiv**; (2) konstante Kategorienwahrscheinlichkeiten $P(Y_i = c|\, \xi = \xi)$ gegeben ξ; (3) **lokale stochastische Unabhängigkeit**

Latent Class Analysis (LCA)

- Was drückt die Modellgleichung der LCA aus? Welcher fundamentale Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie wird dabei angewendet?

$$P(\underline{\mathbf{Y}}) = \sum_{c=1}^{k} P(\xi_c) \cdot \prod_{i=1}^{m} P(Y_i = y_i \mid \xi_c)$$

$$= \sum_{c=1}^{k} P(\xi_c) \cdot P(\underline{\mathbf{Y}} \mid \xi_c)$$

A: Die Modellgleichung verwendet den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit. Modelliert wird die „totale“ Antwortmusterwahrscheinlichkeit, die als gewichtete Summe der klassenspezifischen Antwortmusterwahrscheinlichkeiten, gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten der Klassen ξ_c.

Datenbsp. *LCA*

- Datenbsp. – 13 Items zur Lebenszufriedenheit, aus dem Datensatz Existentielle Schuld!

•"Ich glaube, dass sich vieles, was ich mir für mich erhoffe, erfüllen wird."
•"Mein Leben könnte kaum glücklicher sein, als es ist."
•"Im Prinzip befriedigt mich meine Arbeit."
•"Wenn ich an mein bisheriges Leben zurückdenke, so habe ich viel von dem erreicht, was ich erstrebe."
•"Alles in allem kann ich mich über meine Wohnsituation nicht beklagen."
•"Ich kann sagen, daß mir meine Arbeit das Ansehen einbringt, das ich mir wünsche."
•"Ich bin mit meinem Leben zufrieden."
•"Ich glaube, dass mir die Zeit noch einige interessante und erfreuliche Dinge bringen wird."
•"Ich kann mich über die Höhe meines monatlichen Einkommens nicht beklagen."
•"Ich habe an meinem Arbeitsplatz nichts Grundsätzliches auszusetzen."
•"Wenn ich auf mein bisheriges Leben zurückblicke, bin ich recht zufrieden."
•"Im Großen und Ganzen genügt mir der Wohlstand, in dem ich lebe."
•"Ich bin ganz zufrieden, wenn ich an meine Aussichten für die Zukunft denke."

Datenbsp. *LCA*

- Fragen sollen erfassen:

1. Lebenszufriedenheit: allgemein
2. Lebenszufriedenheit: allgemein
3. Lebenszufriedenheit: Bereich: seelische Gesundheit durch Arbeit
4. Lebenszufriedenheit: allgemein
5. Lebenszufriedenheit: Bereich: Wohnsituation
6. Lebenszufriedenheit: Bereich: soziales Ansehen
7. Lebenszufriedenheit: allgemein
8. Lebenszufriedenheit: allgemein
9. Lebenszufriedenheit: Bereich: finanzielle Absicherung
10. Lebenszufriedenheit: Bereich: Arbeitsbedingungen
11. Lebenszufriedenheit: allgemein
12. Lebenszufriedenheit: Bereich: Leben in Wohlstand
13. Lebenszufriedenheit: Bereich: Persönliche Zukunftssicherheit

Datenbsp. *LCA*

- Welche Parameter werden in der LCA berechnet?

  – Kassenwahrscheinlichkeiten (rel. Klassengrößen)
  – Bedingte Klassenwahrscheinlichkeiten gegeben der Antwortmuster (Personenparameter)
  – klassenspezifische Itemparameter (Itemschwierigkeiten innerhalb der Klassen)