Übung zur Vorlesung - Theorien Psychometrischer Tests II

N. Rose

10. Übung (22.01.2009)

- **Agenda**
  - Schätzung der Modellparameter
  - Modellgeltungskontrolle
  - Linkfunktionen

SEM für kategoriale Daten

- Welches ist die Modellgleichung des Messmodells bei SEM für kategoriale Variablen!

1. $$Y_i^* = \nu_i + \lambda_i \cdot \xi + \varepsilon_i$$

$$E\left(Y_i^* \mid \xi\right) = \nu_i + \lambda_i \cdot \xi$$

2. $$Y_i = c \Leftrightarrow \delta_{ic} \leq Y_i^* \leq \delta_{ic+1}$$

- **Modellparameter:**
  1. Personenparameter = latente Variable ξ (Fähigkeit, …)
  2. Itemparameter:
     - ➔ δ_i Schwellenparameter
     - ➔ λ_i Faktorladung
     - ➔ ν_i Achsenabschnitt

SEM für kategoriale Daten

- Wie wird im Messmodell bei SEM für kategoriale Variablen, die nicht-lineare stochastische Beziehung zwischen der latenten Variable ξ und den manifesten Variablen Y_i modelliert?

  A: Es wird angenommen, dass die manifesten Variablen Y_i **kategorisierte**, messfehlerbehaftete metrische Variablen sind (*Latent Response Variablen*).

- Warum werden SEM-Modelle für kategoriale Daten in der Literatur zu den Probit-Modellen gerechnet?

  A: Zur Schätzung der Schwellenparameter wird die Probit-Funktion (inverse Standardnormalverteilung) verwendet.

SEM für kategoriale Daten

- Erläutern Sie die 3 Schritte der Parameterschätzung in SEM für kategoriale Variablen.

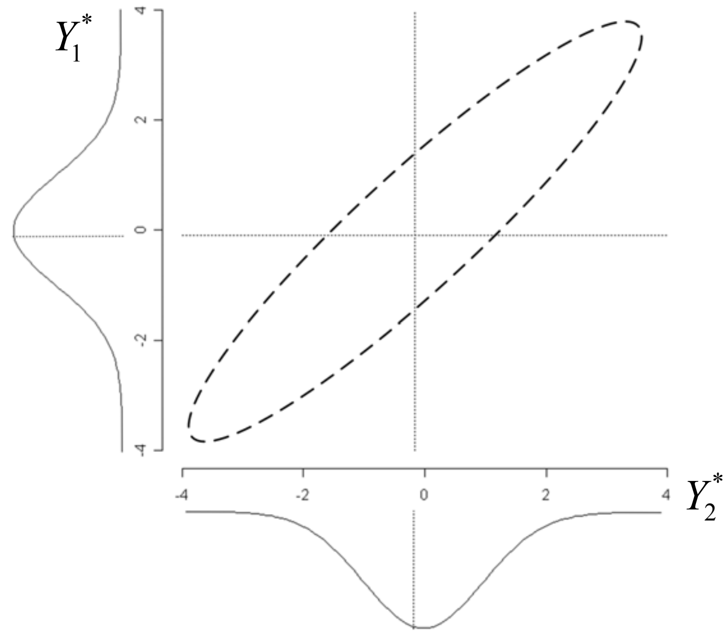
  A: Im ersten Schritt werden die **Schwellen** aufgrund der univariaten Verteilungen der manifesten Variablen geschätzt.
  Im zweiten Schritt werden die **tetra-/polychorischen Korrelationen** auf Basis der bivariaten Häufigkeitsverteilungen geschätzt.
  Im dritten und letzten Schritt werden die übrigen Modellparameter geschätzt (**Weigthed Least Square – Schätzung**).

SEM für kategoriale Daten

- Was sind tetra-/polychorischen Korrelationen?

  A: Spezielle Korrelationsmaße für dichotome/ordinale Variablen.

  ➔ Sind Pearson-Korrelationen zwischen den Latent Response Variables Y^*_i.



SEM für kategoriale Daten

- Welche Nullhypothese testet der –Test in SEM für kategoriale Daten?

$$H_0 : \Sigma^* = \Sigma^*(\boldsymbol{\theta})$$

A: Vorsicht! Obwohl die Nullhypothese als Gleichheit der wahren und der wahren modellimplizierten Varianz-Kovarianzmatrix dargestellt wird, umfasst die Nullhypothese darüber hinaus:

... die Gleichheit der wahren und der wahren modellimplizierten Erwartungswertstruktur

... die Gleichheit der wahren und der wahren modellimplizierten Schwellenstruktur

SEM für kategoriale Daten

- Wie kann man das Rasch-Modell mit SEM für kategoriale Daten testen?

  A: In dem man ein Modell spezifiziert in dem man alle standardisierten Faktorladungen auf einen bestimmten Wert fixiert.

  Bestimmung dieses Wertes unter Verwendung der Umrechnungs-formeln!

$$\alpha_i^{probit} = \frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}$$

$$\alpha_i^{Logit} = 1.7 \cdot \alpha_i^{probit}$$

Beziehung der Parameter verschiedener Modelle

- Umrechnung der Modellparameter:

$$
\begin{tikzcd}
\alpha_i^{\text{probit}} \arrow[rr, shift left, "\approx \alpha_i^{\text{probit}} \cdot 1.7"] \arrow[dr, shift left, "\frac{\alpha_i^{probit}}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{probit}\right)^2}}"] & & \alpha_i^{\text{logit}} \arrow[ll, shift left, "\approx \alpha_i^{\text{logit}} : 1.7"'] \arrow[dl, shift left, "\approx \frac{\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7\right)^2}}"] \\
 & \lambda_{i(z)} \arrow[ul, shift left, "\frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}"] \arrow[ur, shift left, "\approx \frac{1.7 \cdot \lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}"] &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\lambda_{i(z)} = \text{Standardisierte Faktorladung}}$

SEM für kategoriale Daten

- bezüglich der standardisierten faktorladungen folgt unter Gültigkeit des des Rasch-Modells:

$$\alpha_i^{Logit} = 1$$

$$\alpha_i^{probit} = 1.7\alpha_i^{probit}$$

$$\alpha_i^{probit} = \frac{1}{1.7} = 0.588$$

$$0.588 = \frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}$$

$$0.588 = \frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}$$

$$0.588 \cdot \sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2} = \lambda_{i(z)}$$

$$0.588^2 \cdot \left(1-\lambda_{i(z)}^2\right) = \lambda_{i(z)}^2$$

$$0.588^2 - 0.588^2 \cdot \lambda_{i(z)}^2 = \lambda_{i(z)}^2$$

$$0.588^2 = \lambda_{i(z)}^2 + 0.588^2 \cdot \lambda_{i(z)}^2$$

$$0.588^2 = \lambda_{i(z)}^2 \left(1+0.588^2\right)$$

$$\frac{0.588}{\sqrt{1+0.588^2}} = \lambda_{i(z)}$$

$$\lambda_{i(z)} = 0.507$$

SEM für kategoriale Daten

➔ Wichtig: **wenn man die standardisierten Faktorladungen restringieren will**, so muss man die unabhängige und die abhängige Variable **z-standardisieren**:

➔ Fixieren der Varianz der latenten Variablen $Var(\xi) = 1$ und Erwartungswert $E(\xi) = 0$.

➔ Varianz der Latent Response Variable ist in M*plus* bereits per default fixiert: $Var(Y^*_i) = 1$ und $E(Y^*_i) = 0$.