Übung zur Vorlesung - Theorien Psychometrischer Tests II

N. Rose

2. Übung (27.11.2008)

- **Agenda**
  - Antwortmusterwahrscheinlichkeiten
  - Maximum-Likelihood Schätzung

2 Grundannahmen des Rasch-Modells

- Welches sind die **2 Grundannahmen des Rasch-Modells**

  1. Annahme der Rasch-Homogenität
  2. Annahme der lokalen stochastischen Unabhängigkeit

1. Annahme der Rasch-Homogenität

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \frac{\exp(\xi - \beta_i)}{1 + \exp(\xi - \beta_i)}, \quad \text{für alle Variablen } Y_i$$

2. Annahme der lokalen stochastischen Unabhängigkeit

$$P(Y_i = 1 \mid U, Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, \ldots, Y_M) = P(Y_i = 1 \mid U)$$

Antwortmusterwahrscheinlichkeiten

- Es gelte für drei Variablen Y_1, Y_2, und Y_3 das Rasch-Modell. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Antwortmuster $Y_1 = 1$, $Y_2 = 1$ und $Y_3 = 0$, für eine Person mit $\xi(u) = 1$.

gegeben:

$$\beta_1 = -2$$
$$\beta_2 = 0$$
$$\beta_3 = 1$$

gesucht:

$$P\left(Y_i = 1 \cap Y_2 = 1 \cap Y_3 = 0 \mid \xi = 1\right)$$

Antwortmusterwahrscheinlichkeiten

- Lösung: $P\left(Y_i = 1 \cap Y_2 = 1 \cap Y_3 = 0 \mid \xi = 1\right)$

$$= P\left(Y_1 = 1 \mid \xi = 1\right) \cdot P\left(Y_2 = 1 \mid \xi = 1\right) \cdot P\left(Y_3 = 0 \mid \xi = 1\right)$$

➔ unter Annahme der lokalen stochastischen Unabhängigkeit

$$= \frac{\exp(\xi - \beta_1)}{1 + \exp(\xi - \beta_1)} \cdot \frac{\exp(\xi - \beta_2)}{1 + \exp(\xi - \beta_2)} \cdot \left(1 - \frac{\exp(\xi - \beta_3)}{1 + \exp(\xi - \beta_3)}\right)$$

$$= \frac{\exp(\xi - \beta_1)}{1 + \exp(\xi - \beta_1)} \cdot \frac{\exp(\xi - \beta_2)}{1 + \exp(\xi - \beta_2)} \cdot \frac{1}{1 + \exp(\xi - \beta_3)}$$

Antwortmusterwahrscheinlichkeiten

- Lösung:

$$= \frac{\exp(\xi - \beta_1)}{1 + \exp(\xi - \beta_1)} \cdot \frac{\exp(\xi - \beta_2)}{1 + \exp(\xi - \beta_2)} \cdot \frac{1}{1 + \exp(\xi - \beta_3)}$$

$$= \frac{\exp(1 - (-2))}{1 + \exp(1 - (-2))} \cdot \frac{\exp(1 - 0)}{1 + \exp(1 - 0)} \cdot \frac{1}{1 + \exp(1 - 1)}$$

$$= 0.953 \cdot 0.731 \cdot 0.5$$

$$= 0.34$$

Antwortmusterwahrscheinlichkeiten

- Wie wahrscheinlich ist bei den gleichen 3 Items Y_1 - Y_3 und gleicher Fähigkeitsausprägung $\xi(u) = 1$, das Antwortmuster $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$ und $Y_3 = 1$?

$$
\begin{aligned}
&= (1-0.953)\cdot(1-0.731)\cdot 0.5 = 0.047\cdot 0.731\cdot 0.5 \\
&= 0.017
\end{aligned}
$$

➔ Die Antwortmusterwahrscheinlichkeit für (0 1 1) ist geringer als für das Antwortmuster (1 1 0) , da das schwerste Item gelöst, ein sehr leichtes Item jedoch nicht gelöst wurde.

… was wäre wenn (Zusatzaufgabe: „schwer“ !!!):

- Wie ließe sich (formal) die Antwortmusterwahrscheinlichkeit (1,1,0) aufschreiben, wenn die lokale stochastische Unabhängigkeit **nicht** gilt:

$$P\left(Y_i = 1 \cap Y_2 = 1 \cap Y_3 = 0 \mid \xi = 1\right)$$

$$\Rightarrow A \equiv Y_i = 1$$

$$B \equiv Y_2 = 1$$

$$C \equiv Y_3 = 0$$

$$P\left(A \cap B \cap C \mid \xi = 1\right)$$

$$P\left(A \cap \underbrace{B \cap C}_{=D} \mid \xi = 1\right) = P\left(A \cap D \mid \xi = 1\right)$$

$$P\left(A \cap D \mid \xi = 1\right) = P\left(A \mid D \cap \xi = 1\right) \cdot P\left(D \mid \xi = 1\right)$$

- Beachte, siehe letzte Folie: $D \equiv B \cap C$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap D \mid \xi = 1) &= P(A \mid D \cap \xi = 1) \cdot P(D \mid \xi = 1) \\
&= P(A \mid D \cap \xi = 1) \cdot P(B \cap C \mid \xi = 1) \\
&= P(A \mid D \cap \xi = 1) \cdot P(B \mid C \cap \xi = 1) \cdot P(C \mid \xi = 1) \\
&= P(A \mid B \cap C \cap \xi = 1) \cdot P(B \mid C \cap \xi = 1) \cdot P(C \mid \xi = 1)
\end{aligned}
$$

➔ Faktorisierungssatz (S. 41, LB „Wahrscheinlichkeit und Regression“)

- übersetzt:

$$
P(Y_i = 1 \cap Y_2 = 1 \cap Y_3 = 0 \mid \xi = 1)
$$

$$
= P(Y_i = 1 \mid Y_2 = 1 \cap Y_3 = 0 \cap \xi = 1) \cdot P(Y_2 = 1 \mid Y_3 = 0 \cap \xi = 1) \cdot P(Y_3 = 0 \mid \xi = 1)
$$

Maximum Likelihood Schätzung

- Was ist das **Prinzip der Maximum Likelihood Schätzung**?

  Die Modellparameter werden so geschätzt, dass die Daten unter Annahme eines bestimmten Modells, gegeben der Schätzungen der Modellparameter maximal wahrscheinlich sind.

- **mathematische Repräsentation der ML-Schätzung**:

  Maximierung der Wahrscheinlichkeit: $P(\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \max.$

Maximum Likelihood Schätzung

- Wie lässt sich die Daten-Likelihood unter Gültigkeit des Rasch-Modells formulieren:

$$L(\mathbf{Y}) = \prod_{u=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} P\left(Y_i \mid \xi = \xi(u)\right)$$

$$L(\mathbf{Y}) = \prod_{u=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\exp\left(\xi(u) - \beta_i\right)}{1 + \exp\left(\xi(u) - \beta_i\right)} \right)^{y_{iu}} \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\xi(u) - \beta_i\right)} \right)^{1 - y_{iu}}$$