Übung zur Vorlesung - Theorien Psychometrischer Tests II

N. Rose

2. Übung (13.11.2008)

- **Agenda**
  - – Logistische Regression
    - Rechenregeln für Logarithmus- und Exponentialrechnung
    - Logit-Transformation
    - Bedeutung der Modellparameter in der logistischen Regression
  - – Rasch-Modell

…wichtig im weiteren - Rechenregeln

(1.) $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2,$ wobei $b, x_1, x_2 > 0$ und $b \neq 1$

(2.) $\log_b 1 = 0$

(3.) $\log_b b = 1$

(4.) $\log_b \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$

(5.) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$

(1.) $\exp(\ln x) = x,$ wobei $x > 0$

(2.) $\exp(0) = 1$

(3.) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

(4.) $\exp(x_1 - x_2) = \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}$

(5.) $\exp(a \cdot x) = \exp(x)^a$

- Logit-Transformation

  Aufgabe 1: Transformieren sie die Modellgleichung der einfachen logistischen Regression so, dass folgt:

$$\ln\left(\frac{P(Y=1|X)}{1-P(Y=1|X)}\right)=\alpha_0+\alpha_1 X$$

- Lösung – Aufgabe 1:

Modellgleichung: $$P(Y=1\mid X)=\frac{\exp(\alpha_0+\alpha_1 X)}{1+\exp(\alpha_0+\alpha_1 X)}$$

Ausklammern: $$P(Y=1\mid X)=\frac{1}{1+\exp[-(\alpha_0+\alpha_1 X)]}$$

Kehrwert/Umstellen: $$\frac{1}{P(Y=1\mid X)}=1+\exp[-(\alpha_0+\alpha_1 X)] \qquad \mid -1$$

Umstellen: $$\frac{1}{P(Y=1\mid X)}-1=\frac{1}{\exp(\alpha_0+\alpha_1 X)}$$

- Lösung – Aufgabe 1:

Umstellen:

$$\frac{1}{P(Y=1 \mid X)} - \frac{P(Y=1 \mid X)}{P(Y=1 \mid X)} = \frac{1}{\exp(\alpha_0 + \alpha_1 X)}$$

$$\frac{1-P(Y=1 \mid X)}{P(Y=1 \mid X)} = \frac{1}{\exp(\alpha_0 + \alpha_1 X)}$$

$$\frac{P(Y=1 \mid X)}{1-P(Y=1 \mid X)} = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 X)$$

Logarithmieren:

$$\ln\left(\frac{P(Y=1 \mid X)}{P(Y=0 \mid X)}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

- Bedeutung der Modellparameter:

$$P(Y=1|X)=\frac{\exp(\alpha_0+\alpha_1 X)}{1+\exp(\alpha_0+\alpha_1 X)}$$

Beachte: Die Modellparameter werden zumeist in der exponenzierten Weise interpretiert!

1. Achsenabschnitt: $$\exp(\alpha_0)=\frac{P(Y=1|X=0)}{P(Y=0|X=0)}$$

Der exponenzierte Achsenabschnitt ist gleich dem bedingten Chancenverhältnis an der Stelle $X = 0$.

Logistische Regression

- Bedeutung der Modellparameter:

2. logistischer Regressionskoeffizient:

$$\frac{P(Y=1|X)}{P(Y=0|X)} = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 X)$$

$$\frac{P(Y=1|X)}{P(Y=0|X)} = \exp(\alpha_0)\exp(\alpha_1 X)$$

$$\begin{aligned}\frac{P(Y=1|X+1)}{P(Y=0|X+1)} &= \exp(\alpha_0)\cdot\exp(\alpha_1(X+1)) \\ &= \exp(\alpha_0)\cdot\exp(\alpha_1 X + \alpha_1) \\ &= \exp(\alpha_0)\cdot\exp(\alpha_1 X)\cdot\exp(\alpha_1)\end{aligned}$$

Logistische Regression

- Bedeutung der Modellparameter:

2. logistischer Regressionskoeffizient:

$$\frac{P(Y=1 \mid X+1)}{P(Y=0 \mid X+1)} = \exp(\alpha_0) \cdot \exp(\alpha_1 X) \cdot \exp(\alpha_1)$$

$$\frac{\dfrac{P(Y=1 \mid X+1)}{P(Y=0 \mid X+1)}}{\exp(\alpha_0) \cdot \exp(\alpha_1 X)} = \exp(\alpha_1)$$

$$\frac{\dfrac{P(Y=1 \mid X+1)}{P(Y=0 \mid X+1)}}{\dfrac{P(Y=1 \mid X)}{P(Y=0 \mid X)}} = \exp(\alpha_1)$$

➔ $\exp(\alpha_1)$ ist gleich dem bedingten Odds Ratio

Logistische Regression

- Bedeutung/Interpretation des Odds Ratio:

➔ Bsp.: Sei $\exp(\alpha_1)$, also der bedingte Odds Ratio = 2 und der Odds im Zähler gleich 4/1, so folgt:

$$\frac{\dfrac{P(Y=1 \mid X+1)}{P(Y=0 \mid X+1)}}{\dfrac{P(Y=1 \mid X)}{P(Y=0 \mid X)}} = \exp(\alpha_1)$$

$$\frac{\dfrac{4}{1}}{\dfrac{P(Y=1 \mid X)}{P(Y=0 \mid X)}} = 2$$

- Bedeutung/Interpretation des Odds Ratio:

➔ Bsp.: Sei $\exp(\alpha_1)$, also der bedingte Odds Ratio = 2 und der Odds im Zähler gleich 4/1, so folgt:

$$\frac{\frac{4}{1}}{\frac{2}{1}} = 2 \qquad\qquad \frac{P(Y=1\,|\,X)}{P(Y=0\,|\,X)} = \frac{2}{1}$$

Die Chance, bei gegebener Ausprägung $X = x + 1$ die Ausprägung $Y = 1$ zu beobachten, ist zweimal so hoch wie unter $X = x$.

Bsp. kubische Logistische Regression in Mplus

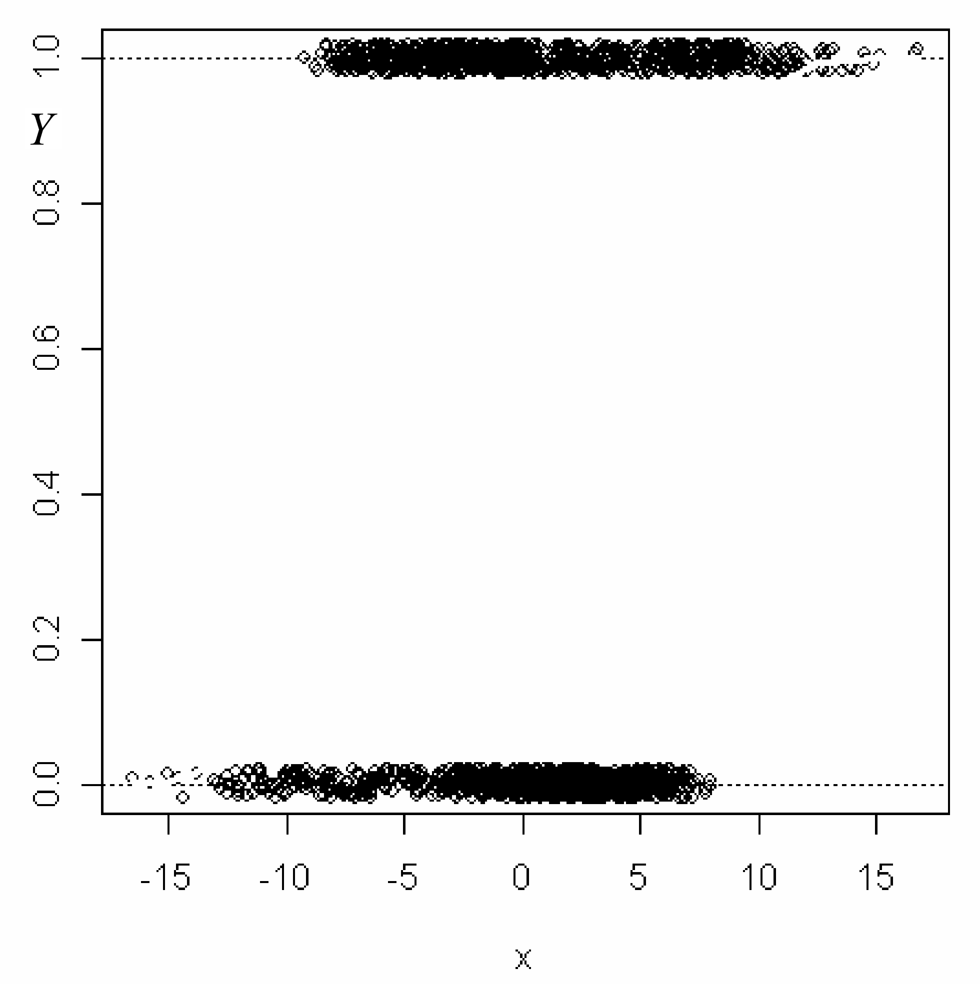
- einfache Regression in Mplus:

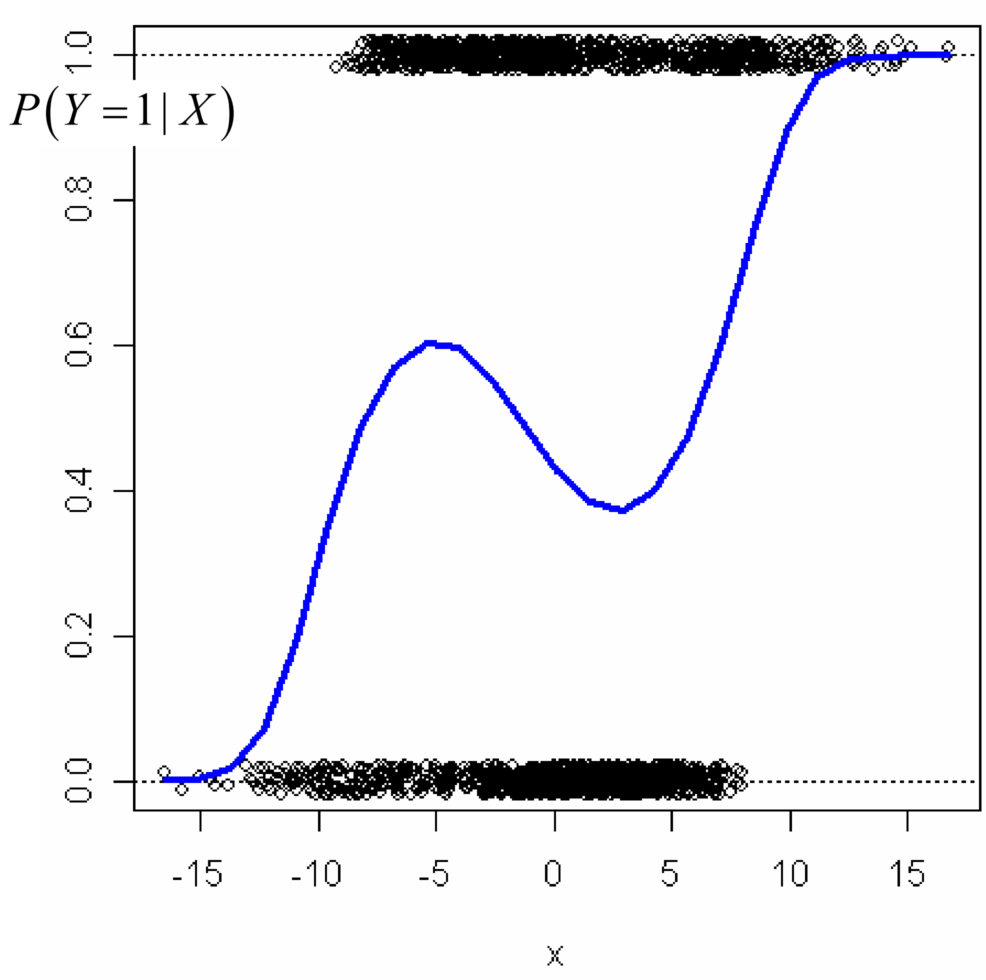
bsp_V2_1.inp

```
 TITLE:        logistische Regression 3;
 DATA:         FILE IS bsp_V2_1.dat;
               TYPE IS INDIVIDUAL;

VARIABLE:      NAMES ARE  y x;
               USEVARIABLES ARE x y;
               CATEGORICAL ARE y;

ANALYSIS:      ESTIMATOR = ML

MODEL:         y on x;

OUTPUT:        TECH1;
               STANDARDIZED;
               SAMPSTAT;
```

Bsp. kubische Logistische Regression in Mplus

- Datenbsp. „**`bsp_V2_1.dat`**“:





Bsp. kubische Logistische Regression in Mplus

- kubische Regression in mit berechneten Termen Mplus:

bsp_V2_1kub.inp

```
TITLE:      kubische logistische Regression 3;
DATA:       FILE IS bsp_V2_1.dat;
            TYPE IS INDIVIDUAL;

VARIABLE:   NAMES ARE  y x;
            USEVARIABLES ARE x y x_2 x_3;
            CATEGORICAL ARE y;

DEFINE:     x_2 = x**2;
            x_3 = x**3;

ANALYSIS:   ESTIMATOR = ML

MODEL:      y on x x_2 x_3;

OUTPUT:     TECH1;
            STANDARDIZED;
            SAMPSTAT;
```

Varianz dichotomer Variablen

- Zeigen Sie, dass für die Varianz einer dichotomen Variable gilt:

$$Var(Y) = P(Y=1) \cdot P(Y=0)$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E\left(\left[Y - E(Y)\right]^2\right) \\
&= E\left(Y^2\right) - \left[E(Y)\right]^2 && \mid E\left(Y^2\right) = E(Y) = P(Y=1) \\
&= P(Y=1) - P(Y=1) \cdot P(Y=1) && \mid Ausklammern \\
&= P(Y=1) \cdot \left[1 - P(Y=1)\right] \\
&= P(Y=1) \cdot P(Y=0)
\end{aligned}
$$

Rasch-Modell

- Was ist die Itemcharakteristik?

➔ Ist die Funktion welche die Lösungswahrscheinlichkeit eines Items in Abhängigkeit der latenten Personenvariable angibt.

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \frac{\exp(\xi - \beta_i)}{1 + \exp(\xi - \beta_i)}$$

- In welcher Beziehung stehen das Modell essentiell τ–äquivalenter Variablen und das Rasch-Modell.

➔ Auf Ebene der Logits entspricht das Rasch-Modelle einem Modell essentiell τ–äquivalenter Variablen.