Übung zur Vorlesung:
„Theorien Psychometrischer Tests II“

- Sitzung 4 -
19.11.2007

Dipl.-Psych. Norman Rose

Agenda

- Allgemeine Modellgeltungskontrolle
  - Likelihoodquotienten Test
  - Person χ^2-Test
  - Bootstrap Verfahren
- WINMIRA

Allgemeine Modellgeltungskontrolle

- Likelihoodquotienten Test
  - Prinzip: Vergleich zweier genesteter Modelle bzgl. der Patternwahrscheinlichkeiten unter den jeweiligen Modellannahmen.

- Person χ^2-Test
  - Prinzip: Vergleich der beobachteten und vom Modell vorhergesagten Patternhäufigkeiten

Likelihoodquotienten Test

- **Allgemeiner Modelltest:** Vergleich der Likelihhoods des saturierten Modells und des restringiertes Modells (unter Annahme der Modellgültigkeit)

- **Vergleichender Modelltest:** Vergleich der Likelihhoods zweier restringierter Modelle mit unterschiedlich starken Restriktionen.

  (Bsp.: Vgl. Rasch-Modell vs. 2PL-Modell)

Likelihoodquotienten Test

- Daten-Likelihood:

$$L = P(\boldsymbol{X}) = \prod_{\underline{X}} P(\underline{X})$$

- Kann unter Annahme eines Modells geschätzt werden ODER ohne Modellannahme!

Likelihoodquotienten Test

1. Schätzung der Likelihood ohne Modellannahme als L_{sat} des saturierten Modells:

$$L = P(\boldsymbol{X}) = \prod_{\underline{X}} P(\underline{X})$$

Einsetzen der Schätzer der unbedingten Pattern-wahrscheinlichkeiten:

$$P(\boldsymbol{X}) = \prod_{\underline{X}} P(\underline{X})$$

$$= \prod_{\underline{X}} \hat{P}(\underline{X}_q) = \prod_{q=1}^{Q} \underbrace{\left(\frac{n(\underline{X}_q)}{N} \right)}_{\substack{\text{relative Häufigkeit} \\ \text{des Pattern } \underline{X}_q}}^{n(\underline{X}_q)}$$

Likelihoodquotienten Test

1. Schätzung der Likelihood mit Annahme der Gültigkeit des Messmodells, hier am Bsp. des Rasch-Modells L_{RA}:

$$L_{RA} = \prod_{u=1}^{N} P\left(\underline{X} \mid U = u, \boldsymbol{\beta}\right)$$

$$L_{RA} = \prod_{u=1}^{N} \underbrace{\prod_{i=1}^{k} P\left(X_i \mid \xi = \xi_u, \boldsymbol{\beta}\right)}_{=P\left(\underline{X} \mid \xi = \xi_u, \boldsymbol{\beta}\right)}$$

$$= \prod_{u=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\frac{\exp\left(\xi_u - \beta_i\right)}{1+\exp\left(\xi_u - \beta_i\right)}\right)^{x_{iu}} \cdot \left(1 - \frac{\exp\left(\xi_u - \beta_i\right)}{1+\exp\left(\xi_u - \beta_i\right)}\right)^{1-x_{iu}}}_{P\left(X_i \mid \xi = \xi_u, \beta_i\right)}$$

Likelihoodquotienten Test

- Berechnung der Prüfgröße:

$$\chi^2_{LR} = -2 \cdot \log(LR)$$
$$= -2 \cdot \log\left(\frac{L_{RA}}{L_{SAT}}\right) = -2 \cdot \left[\log(L_{RA}) - \log(L_{SAT})\right]$$

- Statistische Hypothesen:

$$H_0: \quad L_{RA} = L_{sat}$$
$$H_1: \quad L_{RA} < L_{sat}$$

Person χ^2-Test

- Vergleich der beobachteten und vom Modell vorhergesagten Patternhäufigkeiten:

$$\chi^2_{Pearson} = \sum_{q=1}^{Q} \frac{\left[n_O\left(\underline{X}_q\right) - n_E\left(\underline{X}_q\right)\right]^2}{n_E\left(\underline{X}_q\right)}$$

- Wobei:
  - $n_O\left(\underline{X}_q\right)$ ist die beobachtete absolute Häufigkeit eines Antwortmusters $\underline{X}_q$
  - $n_E\left(\underline{X}_q\right)$ ist die vom Modell erwartete absolute Häufigkeit eines Antwortmusters $\underline{X}_q$

$$n_E\left(\underline{X}_q\right) = \sum_{u=1}^{N} P\left(\underline{X}_q \mid \xi = \xi_u, \boldsymbol{\beta}\right)$$

Bootstrap Verfahren

- Warum Bootstrap?
  - Empirische Schätzung der Verteilung einer Prüfgröße, bei unbekannten Verteilungen!
  - Zur Hypothesentestung, Bestimmung von Konfidenzintervallen …
- Prinzip von Bootstrap?
  - Achtung: Verschiedene Resampling Verfahren:

    Bsp.: Simulation der Stichprobenziehung unter Annahme der Gültigkeit des Modells!
- Wie erfolgt die Bootstrap Inferenz?
  - Bestimmung des p-Wertes des empirisch gefundenen Stichprobenkennwertes (Parameter, Prüfgröße, …) anhand der empirisch ermittelten Verteilung