Übung zur Vorlesung: „Theorien Psychometrischer Tests II“

- Sitzung 3 -
12.11.2007

Dipl.-Psych. Norman Rose

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

- Gegeben seien 2 Rasch-homogene Items Y_i und Y_j, wie lässt sich die Differenz der Itemschwierigkeiten β_i und β_j mathematisch darstellen?

- gesucht: $\beta_i - \beta_j = ???$

- *Hilfestellung:* Verwenden Sie die Logits der beiden Items Y_i und Y_j!

Logarithmus und e-Funktion

(1.) $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2,$ wobei $b, x_1, x_2 > 0$ und $b \neq 1$

(2.) $\log_b 1 = 0$

(3.) $\log_b b = 1$

(4.) $\log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$

(5.) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$

(1.) $\exp(\ln x) = x,$ wobei $x > 0$

(2.) $\exp(0) = 1$

(3.) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

(4.) $\exp(x_1 - x_2) = \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}$

(5.) $\exp(a \cdot x) = \exp(x)^a$

Aufgabe 1:

- Logitvariablen:

$$\text{I: } \ln\left[\frac{P(Y_i=1\,|\,\xi)}{P(Y_i=0\,|\,\xi)}\right]=\xi-\beta_i \quad \text{und} \quad \text{II: } \ln\left[\frac{P(Y_j=1\,|\,\xi)}{P(Y_j=0\,|\,\xi)}\right]=\xi-\beta_j$$

- Gleichungen subtrahieren:

$$\text{I-II: } \ln\left[\frac{P(Y_i=1\,|\,\xi)}{P(Y_i=0\,|\,\xi)}\right]-\ln\left[\frac{P(Y_j=1\,|\,\xi)}{P(Y_j=0\,|\,\xi)}\right]=-\beta_i+\beta_j \quad |\cdot(-1)$$

$$\ln\left[\frac{P(Y_j=1\,|\,\xi)}{P(Y_j=0\,|\,\xi)}\right]-\ln\left[\frac{P(Y_i=1\,|\,\xi)}{P(Y_i=0\,|\,\xi)}\right]=\beta_i-\beta_j \qquad |\exp(\ \ )$$

Aufgabe 1:

$$\frac{\dfrac{P(Y_j=1\mid\xi)}{P(Y_j=0\mid\xi)}}{\dfrac{P(Y_i=1\mid\xi)}{P(Y_i=0\mid\xi)}}=\frac{P(Y_j=1\mid\xi)}{P(Y_j=0\mid\xi)}\cdot\frac{P(Y_i=0\mid\xi)}{P(Y_i=1\mid\xi)}=\exp(\beta_i-\beta_j)$$

$$\frac{P(Y_j=1\cap Y_i=0\mid\xi)}{P(Y_j=0\cap Y_i=1\mid\xi)}=\exp(\beta_i-\beta_j) \qquad \mid \ln$$

$$\ln\left[\frac{P(Y_j=1\cap Y_i=0\mid\xi)}{P(Y_j=0\cap Y_i=1\mid\xi)}\right]=\beta_i-\beta_j$$

➔ Spezifische Objektivität

Begriff: Spezifische Objektivität

- Definition:

… Vergleiche zwischen zwei Objekten (Personen bzgl. ξ) sind unabhängig vom verwendeten Messinstrument (Items mit ihren Itemschwierigkeiten)!

UND:

…Vergleiche zwischen zwei Messinstrumenten (Items bzgl. ihrer Itemschwierigkeiten) sind unabhängig von den untersuchten Objekten (Personen bzgl. ξ)!

Begriff: Suffiziente Statistik

- Im Rasch-Modell ist der Summenscore eine suffiziente Statistik!

  ➔ **Suffiziente Statistik** meint, dass der Summenscore S_u einer Person *u* von *U* alle Informationen zur Schätzung von ξ_u enthält, die durch die Daten gegeben sind!

- Folgerungen:

  ➔ zur Schätzung der Personenvariable ξ , ist es *nicht* wichtig *welche Items gelöst* werden, *sondern* nur *wie viele Items gelöst* werden!

Summenscore – Suffiziente Statistik

- Da im Rasch-Modell der Summenscore S_u eine suffiziente Statistik ist, kann man unter Verwendung von Rechenregeln zeigen, dass gilt:

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi, S\right) = P\left(Y_i = 1 \mid S\right)$$

Herleitung im Buch „Messen und Testen“ (S. 264 - 266)

Aufgabe 4:

- Auch für Verbundereignisse gilt:

$$P\left(Y_i = y \cap Y_j = y \mid \xi, S\right) = P\left(Y_i = y \cap Y_j = y \mid S\right)$$

- **Aufgabenstellung**:

  Zeigen Sie, dass gilt: $$\beta_i - \beta_j = \ln\left[\frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1\right)}\right]$$

- Hilfestellung ➔ Verwenden Sie als Ausgangspunkt:

$$\beta_i - \beta_j = \ln\left[\frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid \xi, S_{ij}\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid \xi, S_{ij}\right)}\right]$$

Aufgabe 4:

- Im Rasch-Modell gilt für Verbundereignisse:

$$\beta_i - \beta_j = \ln\left[\frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid \xi, S_{ij} = 1\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid \xi, S_{ij} = 1\right)}\right]$$

➔ Nur für Sij = 1 definiert!

$$= \ln\left[\frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid S_{ij} = 1\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid S_{ij} = 1\right)}\right]$$

➔ exponenzieren:

$$\exp\left(\beta_i - \beta_j\right) = \frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid S_{ij} = 1\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid S_{ij} = 1\right)}$$

Aufgabe 4:

$$\exp\left(\beta_i-\beta_j\right)=\frac{P\left(Y_j=1\cap Y_i=0\mid S_{ij}=1\right)}{P\left(Y_j=0\cap Y_i=1\mid S_{ij}=1\right)}$$

- Definition für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$\exp\left(\beta_i-\beta_j\right)=\frac{P\left(\left\{Y_j=1,Y_i=0\right\}\cap S_{ij}=1\right)/P\left(S_{ij}=1\right)}{P\left(\left\{Y_j=0,Y_i=1\right\}\cap S_{ij}=1\right)/P\left(S_{ij}=1\right)}$$

$$=\frac{P\left(\left\{Y_j=1,Y_i=0\right\}\cap S_{ij}=1\right)}{P\left(\left\{Y_j=0,Y_i=1\right\}\cap S_{ij}=1\right)}$$

Aufgabe 4:

$$\exp\left(\beta_i - \beta_j\right) = \frac{P\left(\left\{Y_j = 1, Y_i = 0\right\} \cap S_{ij} = 1\right)}{P\left(\left\{Y_j = 0, Y_i = 1\right\} \cap S_{ij} = 1\right)}$$

$$\exp\left(\beta_i - \beta_j\right) = \frac{P\left(\left\{Y_j = 1, Y_i = 0\right\} \cap \left\{\left\{Y_j = 1, Y_i = 0\right\} \cup \left\{Y_j = 0, Y_i = 1\right\}\right\}\right)}{P\left(\left\{Y_j = 0, Y_i = 1\right\} \cap \underbrace{\left\{\left\{Y_j = 1, Y_i = 0\right\} \cup \left\{Y_j = 0, Y_i = 1\right\}\right\}}_{S_{ji} = 1}\right)}$$

$$\exp\left(\beta_i - \beta_j\right) = \frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1\right)}$$

$$\beta_i - \beta_j = \ln\left[\frac{P\left(Y_j = 1 \cap Y_i = 0\right)}{P\left(Y_j = 0 \cap Y_i = 1\right)}\right]$$

➔Zur <u>Schätzbarkeit</u> von Modell-Parametern im Rasch-Modell