Übung zur Vorlesung: „Theorien Psychometrischer Tests II“

28.01.2008
&
30.01.2008

Dipl.-Psych. Norman Rose

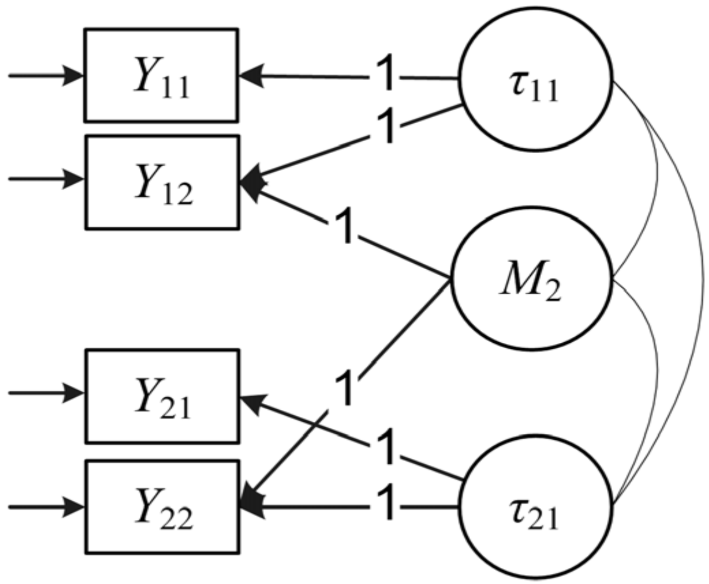
Agenda

- Methodenfaktormodelle
  - Methodeneffekt-Modelle mit Referenzmethode (*MEref*)
  - Methodeneffekt-Modelle mit Common State Variablen (*MEcom*)
- Methodenfaktoren und Kausalitätstheorie

Method effect model with reference method (*MEref*)

- MEref-Modell bei 2 Variablen und 2 Messzeitpunkten

$$Y_{11} = \tau_{11} + \varepsilon_{11}$$
$$Y_{12} = \tau_{12} + M_2 + \varepsilon_{12}$$
$$Y_{21} = \tau_{21} + \varepsilon_{21}$$
$$Y_{22} = \tau_{22} + M_2 + \varepsilon_{22}$$



Method effect model with reference method (*MEref*)

- Bedeutung der Variablen im Modell
  - Latent State variable η

$$\eta_1 = \tau_{11} = \tau_{12} - M_2$$
$$\eta_2 = \tau_{21} = \tau_{22} - M_2$$

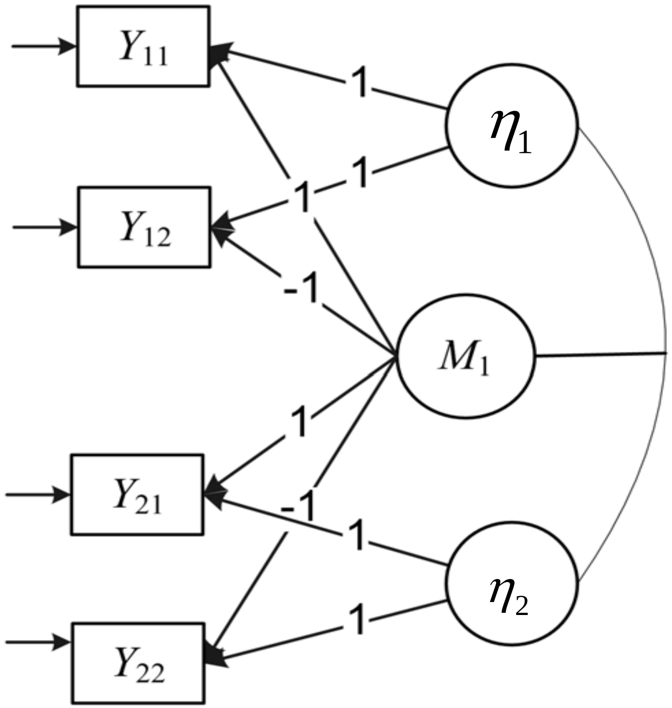
  - Methodenfaktor

$$M_2 = \tau_{12} - \tau_{11}$$
$$M_2 = \tau_{22} - \tau_{21}$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- MEcom-Modell bei 2 Variablen und 2 Messzeitpunkten

$$Y_{11} = \tau_{11} + M_1 + \varepsilon_{11}$$
$$Y_{12} = \tau_{12} - M_1 + \varepsilon_{12}$$
$$Y_{21} = \tau_{21} + M_1 + \varepsilon_{21}$$
$$Y_{22} = \tau_{22} - M_1 + \varepsilon_{22}$$



Effektkodierung

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Bedeutung der Variablen im Modell

  - Latent State variable η

$$I: \quad \tau_{11} = \eta_1 + M_1$$

$$II: \quad \tau_{12} = \eta_1 - M_1$$

$$I + II: \quad \tau_{11} + \tau_{12} = 2\eta_1 \qquad | :2$$

$$\frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} = \eta_1$$

  - entsprechend: $$\frac{\tau_{21} + \tau_{22}}{2} = \eta_2$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Bedeutung der Variablen im Modell

  - Methodenfaktor

$$I: \quad \tau_{11} = \eta_1 + M_1$$

$$II: \quad \tau_{12} = \eta_1 - M_1$$

$$I - II: \quad \tau_{11} - \tau_{12} = 2M_1 \qquad | :2$$

$$\frac{\tau_{11} - \tau_{12}}{2} = M_1$$

  - entsprechend:

$$\frac{\tau_{21} - \tau_{22}}{2} = M_1$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Es folgt: $$\tau_{11} = \eta_1 + M_1$$

$$\tau_{11} = \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{11} - \tau_{12}}{2} = \frac{2\tau_{11} \cancel{+\tau_{12}} \cancel{-\tau_{12}}}{2} = \tau_{11}$$

- Weiterhin gilt: $$\tau_{11} = \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{11} - \tau_{12}}{2} \qquad \Big| - \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}$$

$$\tau_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} = \frac{\tau_{11} - \tau_{12}}{2}$$

$$\tau_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} = M_1$$

Methodenfaktoren und Kausalitätstheorie

- Definition individueller und durchschnittlicher kausaler Effekte
  - **Definition 1** bei einer Treatmentvariable X → {0,1}:

$$ICE(u) = \tau_1(u) - \tau_0(u)$$

$$ACE_{10} = E\left[ICE(U)\right] = E(\tau_1 - \tau_0) = E(\tau_1) - E(\tau_0)$$

  - **Definition 1** bei einer Treatmentvariable X → {0,1, ... , J}:

$$ICE_{j,total}(u) = \tau_j(u) - \frac{1}{J+1}\sum_{j=0}^{J}\tau_j(u)$$

$$ACE_{j,total} = E\left[ICE_{j,total}\right]$$

$$= E\left[\tau_j - \frac{1}{J+1}\sum_{j=0}^{J}\tau_j(u)\right] = E(\tau_j) - \frac{1}{J+1}\sum_{j=0}^{J}E(\tau_j)$$

Methodenfaktoren und Kausalitätstheorie

- Vergleich *MEref* und Definition der individuellen kausalen Effekte:

$$ICE = \tau_1 - \tau_0 \longleftrightarrow M_2 = \tau_{12} - \tau_{11}$$

$$ACE_{10} = E(\tau_1 - \tau_0) \longleftrightarrow E(M_2) = E(\tau_{12} - \tau_{11})$$

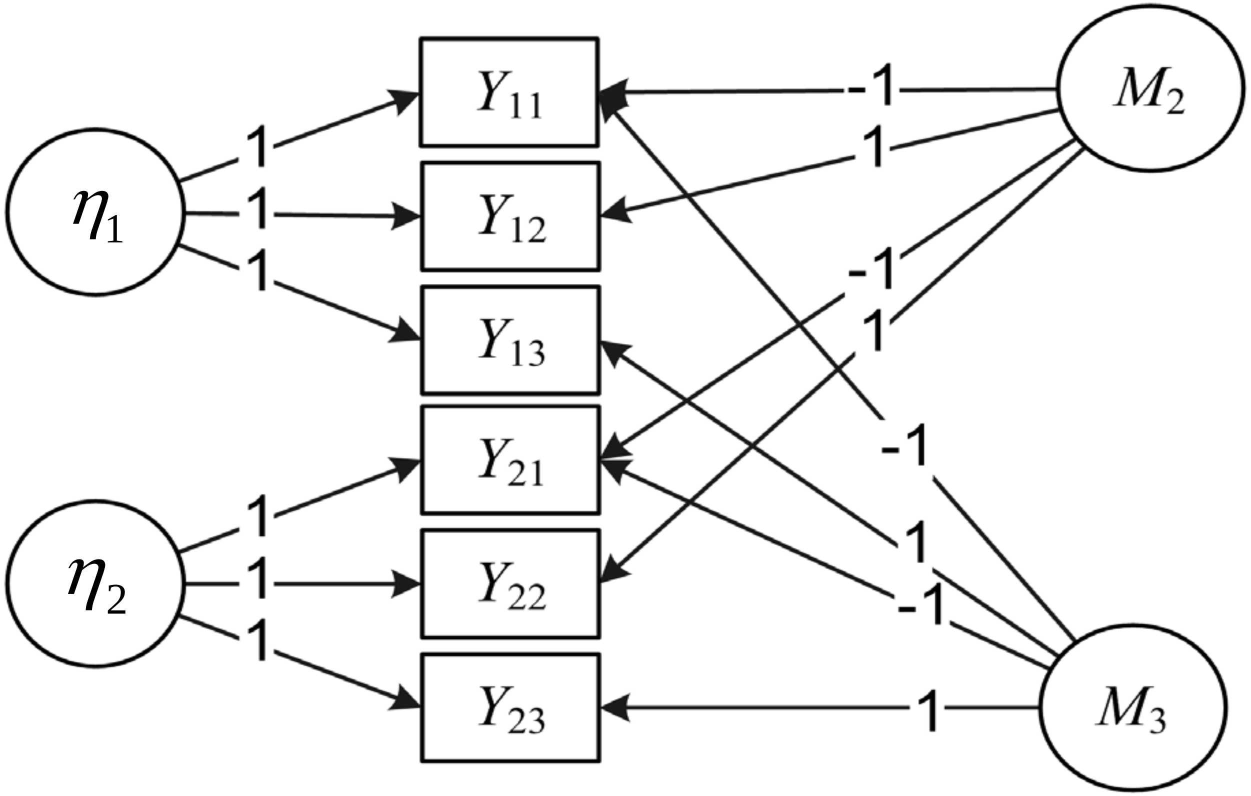
- Vergleich *MEcom* und Definition der individuellen kausalen Effekte:

$$ICE_{j,total}(u) = \tau_j - \frac{1}{J+1}\sum_{j=0}^{J} \tau_j(u) \longleftrightarrow M_1 = \tau_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}$$

$$ACE_{j,total} = E\left[\tau_j - \frac{1}{J+1}\sum_{j=0}^{J} \tau_j(u)\right] \leftrightarrow E(M_1) = E\left(\tau_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}\right)$$

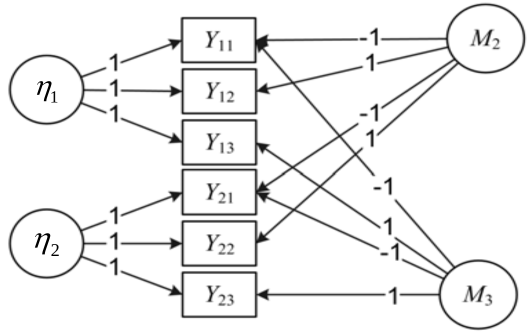
Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Verallgemeinerung auf Modell
  mit mehr als 2 Variablen:



Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Verallgemeinerung auf Modell mit mehr als 2 Variablen:



$$Y_{11} = \tau_{11} - M_2 - M_3 + \varepsilon_{11}$$

$$Y_{12} = \tau_{12} + M_2 + \varepsilon_{12}$$

$$Y_{13} = \tau_{13} + M_3 + \varepsilon_{13}$$

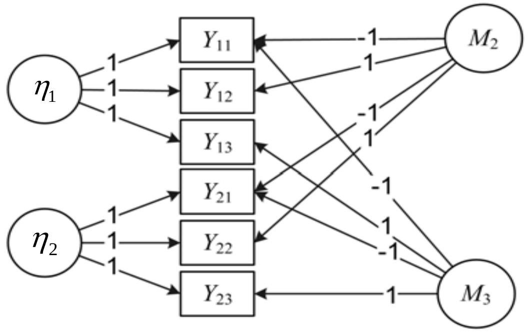
$$Y_{21} = \tau_{21} - M_2 - M_3 + \varepsilon_{21}$$

$$Y_{22} = \tau_{22} + M_{21} + \varepsilon_{22}$$

$$Y_{23} = \tau_{23} + M_3 + \varepsilon_{23}$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

- Verallgemeinerung auf Modell mit mehr als 2 Variablen:



$$I: \quad \tau_{11} = \eta_1 - M_2 - M_3$$

$$II: \quad \tau_{12} = \eta_1 + M_2$$

$$III: \quad \tau_{13} = \eta_1 + M_3$$

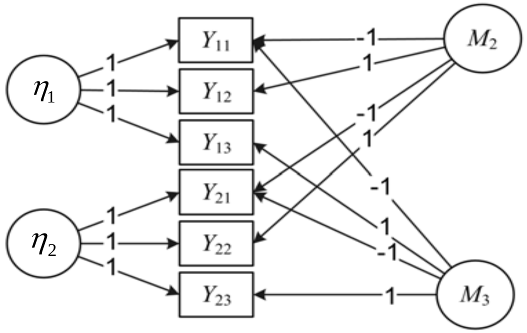
➔ Bedeutung der Latent-State-Variablen

$$I + II + III: \quad \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = \eta_1 - M_2 - M_3 + \eta_1 + M_2 + \eta_1 + M_3$$

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = 3\eta_1$$

$$\frac{\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13}}{3} = \eta_1$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)



- Verallgemeinerung auf Modell mit mehr als 2 Variablen:

$$I: \quad \tau_{11} = \eta_1 - M_2 - M_3$$

$$II: \quad \tau_{12} = \eta_1 + M_2$$

$$III: \quad \tau_{13} = \eta_1 + M_3$$

➔ Bedeutung der Methodenfaktoren:

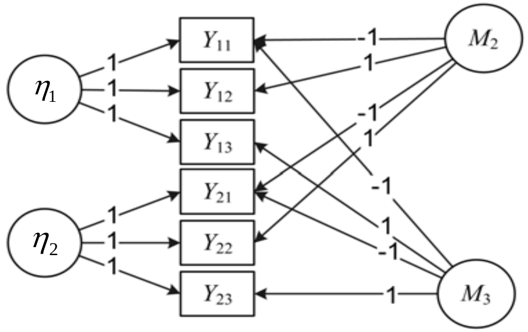
… folgende Gleichungen sind trivialer Weise richtig:

$$I: \tau_{11} = \eta_1 + (\tau_{11} - \eta_1)$$

$$II: \tau_{12} = \eta_1 + (\tau_{12} - \eta_1)$$

$$III: \tau_{13} = \eta_1 + (\tau_{13} - \eta_1)$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)



- Verallgemeinerung auf Modell mit mehr als 2 Variablen:

➔ Bedeutung der Methodenfaktoren:

$$I: \tau_{11} = \eta_1 + \underbrace{(\tau_{11} - \eta_1)}_{-M_2 - M_3}$$

ist Folge der Effektkodierung

$$II: \tau_{12} = \eta_1 + \underbrace{(\tau_{12} - \eta_1)}_{M_2}$$

$$III: \tau_{13} = \eta_1 + \underbrace{(\tau_{13} - \eta_1)}_{M_3}$$

Method effect model with common state variables (*MEcom*)

➔ Bedeutung der Methodenfaktoren – „Beweis":

$\underline{I + II + III:}$

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = \eta_1 + (\tau_{11} - \eta_1) + \eta_1 + (\tau_{12} - \eta_1) + \eta_1 + (\tau_{13} - \eta_1)$$

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = 3\eta_1 + (\tau_{11} - \eta_1) + (\tau_{12} - \eta_1) + (\tau_{13} - \eta_1) \qquad | -3\eta_1$$

$$\left(\frac{\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13}}{3} - \eta_1\right) \cdot 3 = (\tau_{11} - \eta_1) + (\tau_{12} - \eta_1) + (\tau_{13} - \eta_1)$$

$$(\eta_1 - \eta_1) \cdot 3 = (\tau_{11} - \eta_1) + (\tau_{12} - \eta_1) + (\tau_{13} - \eta_1)$$

$$0 = (\tau_{11} - \eta_1) + \underbrace{(\tau_{12} - \eta_1)}_{M2} + \underbrace{(\eta_1 - \tau_{13})}_{M3} \qquad | -(\tau_{12} - \eta_1) \text{ und } -(\tau_{13} - \eta_1)$$

$$-(\tau_{12} - \eta_1) - (\tau_{13} - \eta_1) = (\tau_{11} - \eta_1)$$

$$-\underbrace{(\eta_1 - \tau_{12})}_{M_2} - \underbrace{(\tau_{13} - \eta_1)}_{M_3} = \underbrace{(\eta_1 - \tau_{11})}_{-(M_2 + M_3)}$$