Übung zur Vorlesung:
„Theorien Psychometrischer Tests II“

14.01.2008
&
16.01.2008

Dipl.-Psych. Norman Rose

Agenda

- Parameterumrechnung GRM vs. SEM für ordinale Variablen
  - Itemdiskriminationen
  - Schwellenparameter

- Berechnung von Schwellen- vs. Kategorienwahrscheinlichkeiten:
  - Graded Response Model (GRM)
  - Partial Credit Model (PCM)

Parameterumrechnung GRM vs. SEM

- **Datenbsp.:**
  - Modellparameter (M*plus*) des Modells der Subskala „gute vs. schlechte“ Stimmung

1. Umrechnung der Itemdiskriminationen

2. Umrechnung der Schwellenparameter

GRM und SEM für ordinale Variablen

- Umrechnung der Itemdiskriminationen und Faktorladungen:

$$\alpha_i^{\text{probit}} \xleftarrow{\approx\, \alpha_i^{\text{logit}} : 1.7} \alpha_i^{\text{logit}}$$

$$\alpha_i^{\text{probit}} \xrightarrow[\approx\, \alpha_i^{\text{probit}} \cdot 1.7]{} \alpha_i^{\text{logit}}$$

$$\lambda_{i(z)} \xrightarrow{\frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}} \alpha_i^{\text{probit}}$$

$$\alpha_i^{\text{probit}} \xrightarrow{\frac{\alpha_i^{probit}}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{probit}\right)^2}}} \lambda_{i(z)}$$

$$\lambda_{i(z)} \xrightarrow{\approx \frac{1.7 \cdot \lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}} \alpha_i^{\text{logit}}$$

$$\alpha_i^{\text{logit}} \xrightarrow{\approx \frac{\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7\right)^2}}} \lambda_{i(z)}$$

$\boxed{\lambda_{i(z)} = \text{Standardisierte Faktorladung}}$

Beachte: Umrechnungsformeln gelten nur bei Einfachladungen!

Umrechnung der Itemdiskriminationen GRM und SEM

- Output – Mplus:

gut_t1_mlr_omf.out

	Estimates	S.E.	Est./S.E.	Std	StdYX
GUT_L BY					
GUT	1.908	0.176	10.835	1.908	0.725
WOHL	0.446	0.096	4.667	0.446	0.239
ZUFR	1.960	0.171	11.488	1.960	0.734
GLUECKL	1.729	0.158	10.933	1.729	0.690
SCHLECHT	3.317	0.369	8.994	3.317	0.877
UNWOHL	2.142	0.186	11.521	2.142	0.763
UNZUFR	3.122	0.293	10.659	3.122	0.865
UNGLUE	3.206	0.333	9.634	3.206	0.870

„MLR“
➔ logistisches GRM

gut_t1_wlsmv_omf.out

	Estimates	S.E.	Est./S.E.	Std	StdYX
GUT_L BY					
GUT	0.728	0.024	29.930	0.728	0.728
WOHL	0.222	0.046	4.880	0.222	0.222
ZUFR	0.750	0.024	31.808	0.750	0.750
GLUECKL	0.688	0.025	27.651	0.688	0.688
SCHLECHT	0.888	0.015	59.492	0.888	0.888
UNWOHL	0.784	0.021	38.145	0.784	0.784
UNZUFR	0.861	0.016	52.767	0.861	0.861
UNGLUE	0.873	0.015	58.509	0.873	0.873

„WLSMV“
➔ SEM für ordinale Variablen

Umrechnung der Itemdiskriminationen GRM und SEM

- Für das Item „gut“ aus den MDBF-Daten:

  – Berechnung der Itemdiskrimination für das Norml-Ogiven-GRM:

$$\alpha_{gut}^{probit} = \frac{0.728}{\sqrt{1-0.728^2}} = \frac{0.728}{\sqrt{0.470}} = 1.061$$

  – Umrechnung in die logistische Metrik:

$$\alpha_{gut}^{\text{logit}} = 1.7 \cdot \alpha_{gut}^{probit} = 1.7 \cdot 1.062 = 1.805$$

Umrechnung der Itemdiskriminationen GRM und SEM

- Umrechnung der Schwellenparameter

$$\beta_{iy} = \frac{\delta_{iy} - \nu_i}{\lambda_i}$$

$$\delta_{iy} = \nu_i + \lambda_i \cdot \beta_{iy}$$

wobei: β_{iy} = Itemschwierigkeit der Normal-Ogiven-GRM

δ_{iy} = Schwellenparameter / SEM

ν_i = Intercept des Messmodells / SEM

Umrechnung der Itemdiskriminationen GRM und SEM

- Für das Item „gut“ aus den MDBF-Daten:

gut_t1_mlr_omf.out

Thresholds

GUT$1	-4.125	0.294	-14.051	-4.125	-1.567
GUT$2	-2.144	0.189	-11.331	-2.144	-0.815
GUT$3	0.050	0.139	0.360	0.050	0.019
GUT$4	2.826	0.217	13.036	2.826	1.074
WOHL$1	-3.115	0.218	-14.297	-3.115	-1.668
WOHL$2	-1.577	0.122	-12.881	-1.577	-0.844
WOHL$3	-0.002	0.093	-0.020	-0.002	-0.001
WOHL$4	1.902	0.135	14.052	1.902	1.018
ZUFR$1	-4.763	0.352	-13.534	-4.763	-1.784
ZUFR$2	-2.064	0.190	-10.854	-2.064	-0.773

„MLR“
➔ logistisches GRM

gut_t1_wlsmv_omf.out

Thresholds

GUT$1	-1.605	0.092	-17.400	-1.605	-1.605
GUT$2	-0.832	0.064	-13.030	-0.832	-0.832
GUT$3	0.030	0.056	0.538	0.030	0.030
GUT$4	1.087	0.070	15.516	1.087	1.087
WOHL$1	-1.683	0.097	-17.320	-1.683	-1.683
WOHL$2	-0.913	0.066	-13.923	-0.913	-0.913
WOHL$3	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000
WOHL$4	1.087	0.070	15.516	1.087	1.087
ZUFR$1	-1.797	0.105	-17.048	-1.797	-1.797
ZUFR$2	-0.769	0.063	-12.280	-0.769	-0.769

„WLSMV“
➔ SEM für ordinale Variablen

Umrechnung der Itemdiskriminationen GRM und SEM

- Für das Item „gut“ aus den MDBF-Daten:
  - Beachte: Im Output sind nicht die Schwellen angegeben sondern:

$$Thresholds = \alpha_i^{\text{logit}} \cdot \beta_{ij}$$

$$\beta_{gut,1} = \frac{-4.125}{1.908} = -2.205$$

  - Berechnung der Schwellenparameter für das Norml-Ogiven-GRM:

$$\beta_{gut,1} \approx \frac{-1.605 - 0}{0.728} = -2.171$$

  - Umrechnung in die logistische Metrik entfällt!!

Berechnung der Kategorienwahrschein-lichkeiten - GRM

- **Operation Characteristic Curves (OCC)**
  - Die *OCC* sind die bzgl. ξ – bedingten Kategorienwahrschein-lichkeiten *mindestens* in der Kategorie y von Y_i zu antworten.

$$P\left(Y_i \geq y \mid \xi\right) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\xi - \beta_{iy}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\xi - \beta_{iy}\right)\right]}$$

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten als Differenzen von *OCC* über benachbarte Schwellen

Berechnung der Kategorienwahrschein-lichkeiten - GRM

- Für ein Item Y_i mit C+1 Kategorien gilt:

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = P(Y_i \geq 1 \mid \xi) - P(Y_i \geq 2 \mid \xi)$$
$$P(Y_i = 2 \mid \xi) = P(Y_i \geq 2 \mid \xi) - P(Y_i \geq 3 \mid \xi)$$
$$\vdots$$
$$P(Y_i = C \mid \xi) = P(Y_i \geq C \mid \xi) - 0$$

- Für $P(Y_i = 0 \mid \xi)$ gilt: $P(Y_i = 0 \mid \xi) = 1 - P(Y_i \geq 1 \mid \xi)$

Berechnung der Kategorienwahrschein-lichkeiten - GRM

- **Aufgabe:**
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in der Kategorie des Items „*Gut*“ = 2 zu antworten, wenn ξ den Wert 1 annimmt.
  - gegeben aus Mplus: $\alpha_i = 1.908$

$$\beta_{gut,2} = -2.144 / 1.908 \approx -1.124$$

$$\beta_{gut,3} = 0.050 / 1.908 \approx 0.026$$

$$P(Y_i = 2 \mid \xi) = P(Y_i \geq 2 \mid \xi) - P(Y_i \geq 3 \mid \xi)$$

$$P(Y_i = 2 \mid \xi) = \frac{\exp\left[1.908\left(\xi - [-1.124]\right)\right]}{1 + \exp\left[1.908\left(\xi - [-1.124]\right)\right]} - \frac{\exp\left[1.908\left(\xi - 0.026\right)\right]}{1 + \exp\left[1.908\left(\xi - 0.026\right)\right]}$$

Partial Credit Model (PCM)

- Modellgleichung für das Item Y_i mit insgesamt C+1 Kategorien:

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{y} \left(\xi - \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp \sum_{j=1}^{c} \left(\xi - \kappa_{ij}\right)}$$

- Dabei gilt: $\sum_{j=0}^{0} \left(\xi - \kappa_{i0}\right) = 0$

Partial Credit Model (PCM)

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten, bei einem 4-karegoriellen Item:

$$P(Y_i = y \mid \xi) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{y} (\xi - \kappa_{ij})}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp \sum_{j=1}^{c} (\xi - \kappa_{ij})}$$

$$P(Y_i = 2 \mid \xi) = \frac{\exp\left[(\xi - \kappa_{i0}) + (\xi - \kappa_{i1}) + (\xi - \kappa_{i2})\right]}{\begin{aligned} 1 &+ \exp\left[(\xi - \kappa_{i1})\right] \\ &+ \exp\left[(\xi - \kappa_{i1}) + (\xi - \kappa_{i2})\right] \\ &+ \exp\left[(\xi - \kappa_{i1}) + (\xi - \kappa_{i2}) + (\xi - \kappa_{i3})\right] \end{aligned}}$$

Partial Credit Model (PCM)

- Reformulierung der Modellgleichung

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = \frac{\exp\left(y \cdot \xi - \sum_{j=0}^{y} \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp\left(c \cdot \xi - \sum_{j=0}^{c} \kappa_{ij}\right)}$$

- Dabei gilt: $\kappa_{i0} = 0$