Übung zur Vorlesung: „Theorien Psychometrischer Tests II“

07.01.2008
&
09.01.2008

Dipl.-Psych. Norman Rose

Agenda

- Partial Credit Model (PCM)
- Kategorien- vs. Schwellenwahrscheinlichkeit

Partial Credit Model (PCM)

- Modellgleichung für das Item Y_i mit insgesamt C Kategorien:

$$P(Y_i = y \mid \xi) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{y} (\xi - \kappa_{ij})}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp \sum_{j=1}^{c} (\xi - \kappa_{ij})}$$

- Dabei gilt: $\sum_{j=0}^{0} (\xi - \kappa_{i0}) = 0$

Partial Credit Model (PCM)

- Berechnung der Kategorienwahrscheinlichkeiten, bei einem 4-karegoriellen Item:

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = \frac{\exp \sum_{j=0}^{y}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp \sum_{j=1}^{c}\left(\xi - \kappa_{ij}\right)}$$

$$P\left(Y_i = 2 \mid \xi\right) = \frac{\exp\left[\left(\xi - \kappa_{i0}\right) + \left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right)\right]}{\begin{aligned} &1 + \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right)\right] \\ &+ \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right)\right] \\ &+ \exp\left[\left(\xi - \kappa_{i1}\right) + \left(\xi - \kappa_{i2}\right) + \left(\xi - \kappa_{i3}\right)\right] \end{aligned}}$$

Partial Credit Model (PCM)

- Reformulierung der Modellgleichung

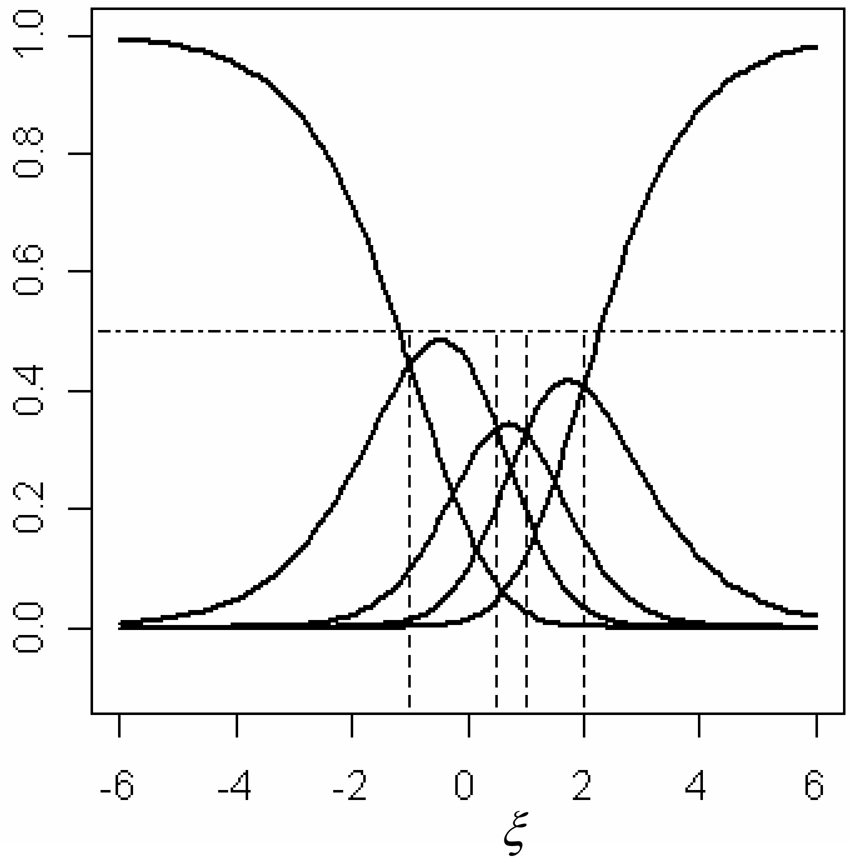
$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right) = \frac{\exp\left(y \cdot \xi - \sum_{j=0}^{y} \kappa_{ij}\right)}{1 + \sum_{c=1}^{C} \exp\left(c \cdot \xi - \sum_{j=0}^{c} \kappa_{ij}\right)}$$

- Dabei gilt: $\kappa_{i0} = 0$

Partial Credit Model (PCM)

- Im PCM werden **Kategorienwahrscheinlichkeiten** gegeben der latenten Personenvariable berechnet!

$P(Y_i = y \mid \xi)$



Die Kategorienwahrscheinlichkeiten der Kategorie $Y = 0$ und $Y = C$ sind monotone Funktionen von ξ.

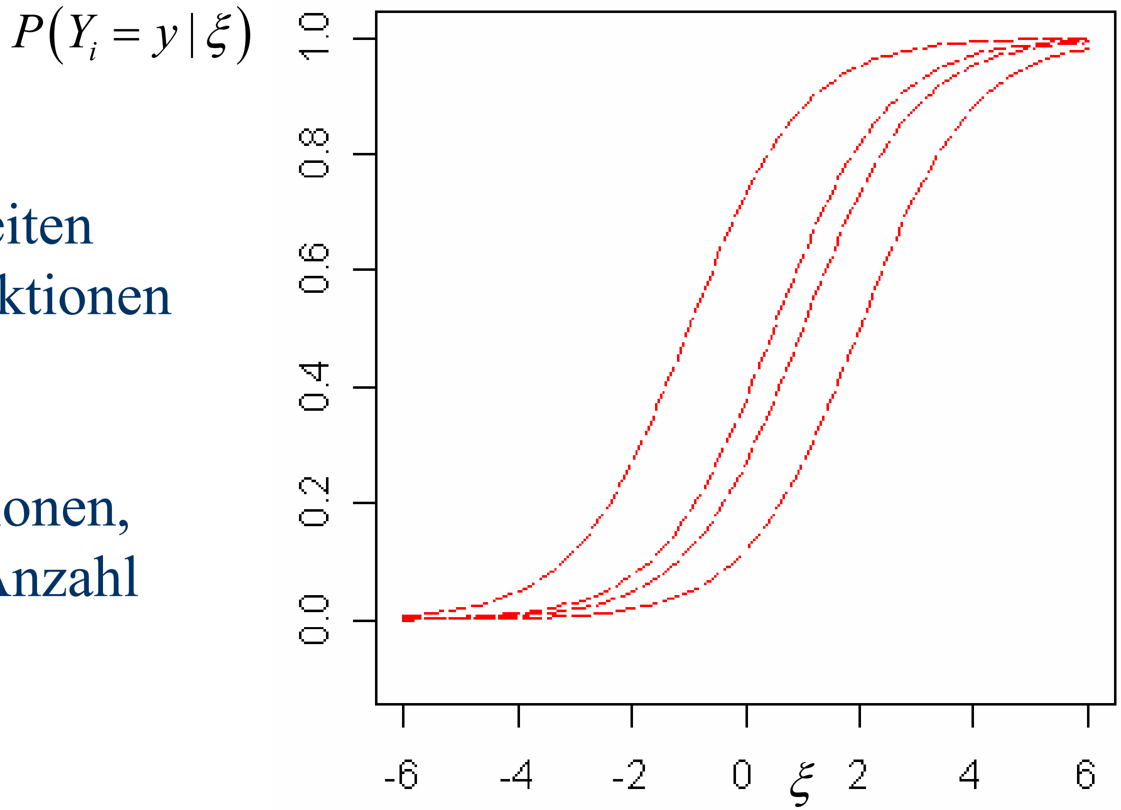
Die Kategorienwahrscheinlichkeiten der Kategorie $Y = 1$ bis $Y = \mathrm{C} - 1$ sind unimodale, nicht-monotone Funktionen von ξ.

Partial Credit Model (PCM)

- **Schwellenwahrscheinlichkeiten** gibt den relativen Anteil der Kategorienwahrscheinlichkeit der „höheren“ Kategorie $Y = y$ von zwei benachbarten Kategorien y und $y + 1$.

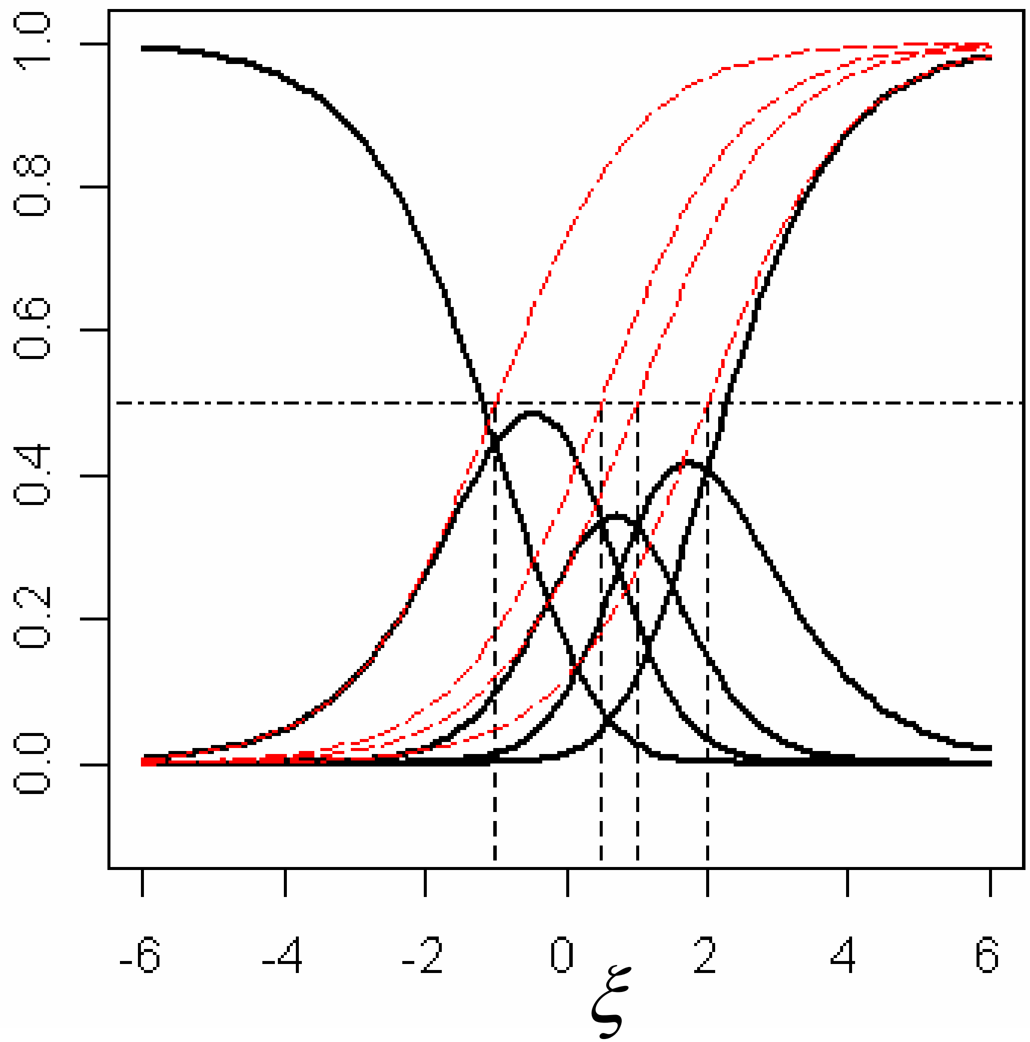
Die Schwellwahrscheinlichkeiten sind monotone steigende Funktionen von ξ.

Es gibt C - 1 Schwellenfunktionen, wobei diese Zahl gleich der Anzahl der Schwellen ist!



Partial Credit Model (PCM)

$$P\left(Y_i = y \mid \xi\right)$$



- **Schwellen- und Kategorien-wahrscheinlichkeiten**

Schwellen- und Kategorienwahrscheinlichkeiten

- **Aufgabe:**

  Zeigen Sie, dass im dichotomen Raschmodell Schwellenwahrscheinlichkeit der Kategorienwahrscheinlichkeit ist.

1. Schwellenwahrscheinlichkeit im Rasch-Modell:

$$PT_{Uiy} = \frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi) + P(Y_i = 1 \mid \xi)}$$

Schwellen- und Kategorienwahrscheinlichkeiten

- Schwellenwahrscheinlichkeit im Rasch-Modell:

$$PT_{Uiy} = \frac{\dfrac{\exp(\xi - \beta_i)}{1+\exp(\xi - \beta_i)}}{\dfrac{1}{1+\exp(\xi - \beta_i)} + \dfrac{\exp(\xi - \beta_i)}{1+\exp(\xi - \beta_i)}}$$

$$PT_{Uiy} = \frac{\dfrac{\exp(\xi - \beta_i)}{\cancel{1+\exp(\xi - \beta_i)}}}{\dfrac{1+\exp(\xi - \beta_i)}{\cancel{1+\exp(\xi - \beta_i)}}} = \frac{\exp(\xi - \beta_i)}{1+\exp(\xi - \beta_i)} = P(Y_i = 1 \mid \xi)$$

$$PT_{Uiy} = P(Y_i = 1 \mid \xi)$$

Iteminformationsfunktion des GRM:

- Die Iteminformation ist bei polytomen Items zumeist höher als bei dichotomen Items

$$I_i(\xi) = \sum_{y=1}^{C} I_{iy}(\xi) \cdot P(Y_i = y \mid \xi)$$

$I_{iy}(\xi)$ ist die Informationsfunktion der Antwortkategorie y

- **Faktoren, welche die Iteminformation beeinflussen**:
  - Größe des Itemdiskriminationsparameter
  - Verteilung der latenten Variable im Vergleich zur Verteilung der Schwellen
  - Streuung (Distanz) der Schwellenparameter