Übung zur Vorlesung: „Theorien Psychometrischer Tests II“

Dipl.-Psych. Norman Rose

Zur Übung

- Ziel der Übung
  - Fragen aus der Vorlesung klären
  - Übungsaufgabe rechnen
  - Demonstration von Software und Analysen

- Sie sollten dabei haben:
  - Taschenrechner
  - Fragen aus der Vorlesung

Kontrollfragen

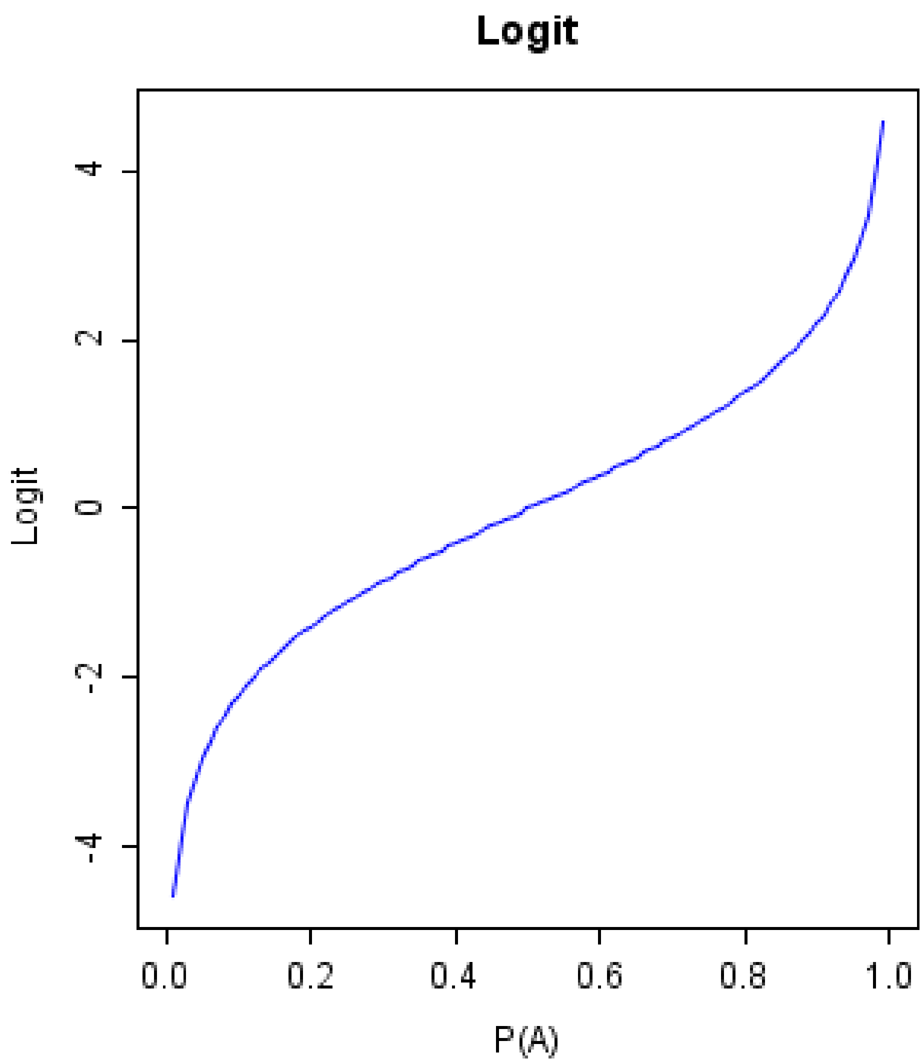
1. Was ist der Logit?
2. Was bedeutet der Begriff Itemcharakteristik?
3. Was meint lokale stochastische Unabhängigkeit?

Was ist der Logit?

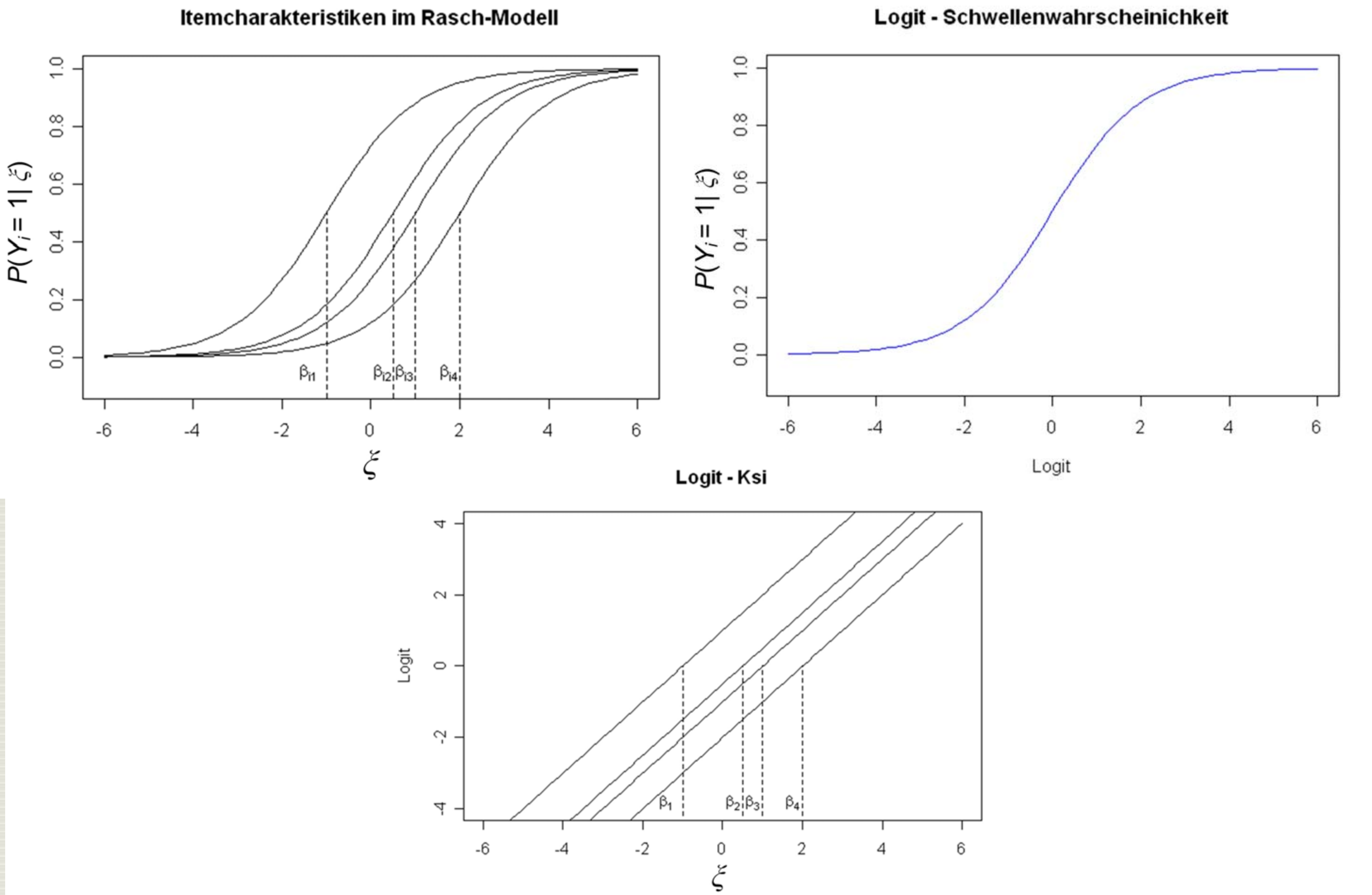
- Logit =logarithmierter Odds

$$\ln\left(\frac{P(A)}{1-P(A)}\right)$$

- dient der Linearisierung s-förmiger (sigmoider) Funktionen



Linearisierung:

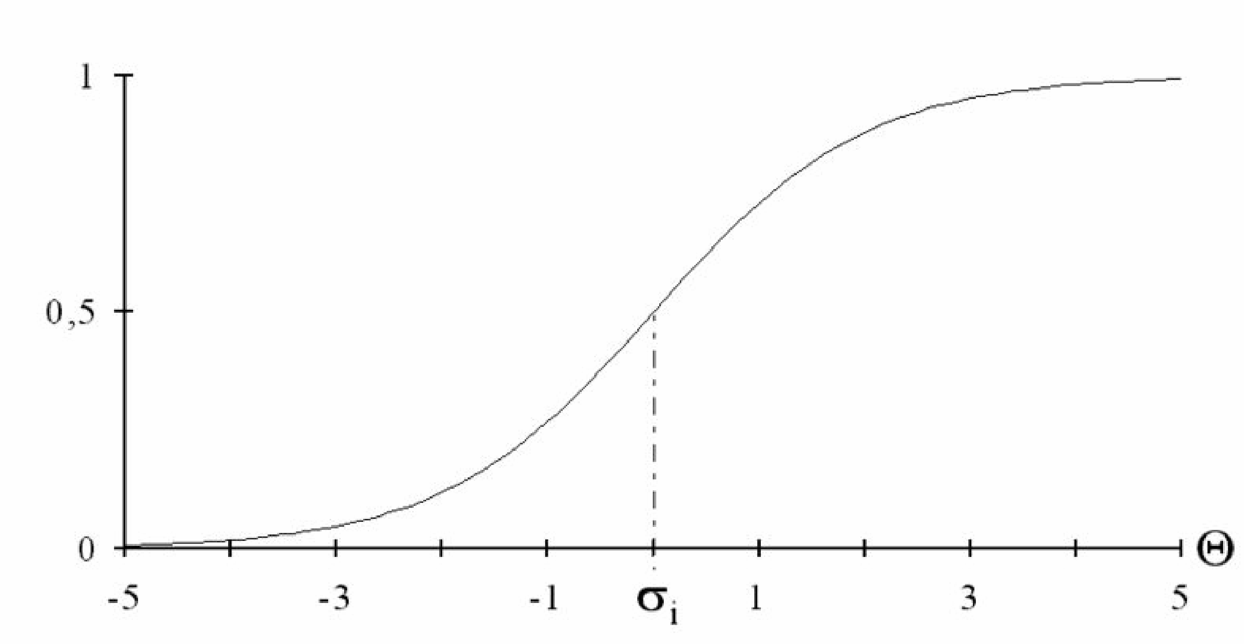


Kontrollfragen

1. Was ist der Logit?
2. **Was bedeutet der Begriff Itemcharakteristik?**
3. Was meint lokale stochastische Unabhängigkeit?

Was ist die Itemcharakteristik?

- Itemcharakteristik im Rasch-Modell:



$$P(Y=1\,|\,\xi)=\frac{\exp(\xi-\beta_i)}{1+\exp(\xi-\beta_i)}=\frac{1}{1+\exp\left[-(\xi-\beta_i)\right]}$$

Kontrollfragen

1. Was ist der Logit?
2. Was bedeutet der Begriff Itemcharakteristik?
3. **Was meint lokale stochastische Unabhängigkeit?**

Lokale stochastische Unabhängigkeit

- Mathematisch:

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi, Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_m\right) = P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)$$

- Bei gegebener Personenvariable $\xi = \xi$ sind die Items unkorreliert!

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

- Gegeben seien drei Items eines Raschmodells mit den Schwierigkeiten: $\beta_1 = -1$

$$\beta_2 = 0$$

$$\beta_3 = 1$$

- **Frage:** Wie wahrscheinlich ist das folgende Antwortmuster bei einer Person *u* mit $\xi = 1$?

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = 0$$

$$Y_3 = 1$$

Aufgabe 1:

- gesucht: $P\left(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1 \mid \xi = \xi_u\right)$

- Lösung: $P\left(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1 \mid \xi = \xi_u\right) = P\left(\mathbf{Y}_u \mid \xi = \xi_u\right)$

$$P\left(\mathbf{Y}_u \mid \xi = \xi_u\right) = P\left(Y_1 = 0 \mid Y_2 = 0, Y_3 = 1, \xi = \xi_u\right)$$
$$\cdot P\left(Y_2 = 0 \mid Y_3 = 1 \cap \xi = \xi_u\right)$$
$$\cdot P\left(Y_3 = 1 \mid \xi = \xi_u\right)$$

… entspricht dem Faktorisierungssatz

(Buch: „Wahrscheinlichkeit und Regression“, S. 38)

Aufgabe 1:

- Lösung:

  ➔ unter Gültigkeit der lokalen stochastischen Unabhängigkeit vereinfacht sich die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Antwortmusters der Person *u*:

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{Y}_u \mid \xi = \xi_u) &= P\left(Y_1 = 0 \mid \cancel{Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1 \cap} \, \xi = \xi_u\right) \\
&\quad \cdot P\left(Y_2 = 0 \mid \cancel{Y_3 = 1 \cap} \, \xi = \xi_u\right) \\
&\quad \cdot P\left(Y_3 = 1 \mid \xi = \xi_u\right) \\
&= P\left(Y_1 = 0 \mid \xi = \xi_u\right) \cdot P\left(Y_2 = 0 \mid \xi = \xi_u\right) \cdot P\left(Y_3 = 1 \mid \xi = \xi_u\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

- Zeigen Sie, dass für die Varianz eines dichotomen Items *Y* gilt:

$$Var(Y) = P(Y=1) \cdot P(Y=0)$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= P(Y=1) \cdot P(Y=0) \\
&= E\left(\left[Y - E(Y)\right]^2\right) \\
&= E\left(Y^2\right) - \left[E(Y)\right]^2 && \mid E\left(Y^2\right) = E(Y) = P(Y=1) \\
&= P(Y=1) - P(Y=1) \cdot P(Y=1) && \mid Ausklammern \\
&= P(Y=1) \cdot \left[1 - P(Y=1)\right] \\
&= P(Y=1) \cdot P(Y=0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

- Exkurs zu Aufgabe 2:
  - Zeige, dass gilt: $E\left(\left[Y-E(Y)\right]^2\right)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2$

$$
\begin{aligned}
E\left(\left[Y-E(Y)\right]^2\right) &= E\left(Y^2\right)-E(Y)^2 \\
&= E\left(\left[Y-E(Y)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right) \\
&= E\left(Y^2-2\cdot Y\cdot E(Y)+E(Y)^2\right) \\
&= E\left(Y^2\right)-2E\left(Y\cdot E(Y)\right)+E(Y)^2 \\
&= E\left(Y^2\right)-2E(Y)E(Y)+E(Y)^2 \\
&= E\left(Y^2\right)-2E(Y)^2+E(Y)^2 \\
&= E\left(Y^2\right)-E(Y)^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3:

- Gegeben seien 2 Rasch-homogene Items Y_i und Y_j, wie lässt sich die Differenz der Itemschwierigkeiten β_i und β_j mathematisch darstellen?

- gesucht: $\beta_i - \beta_j = ???$

- *Hilfestellung:* Verwenden Sie die Logits der beiden Items Y_i und Y_j!

Logarithmus und e-Funktion

(1.) $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2,$ wobei $b, x_1, x_2 > 0$ und $b \neq 1$

(2.) $\log_b 1 = 0$

(3.) $\log_b b = 1$

(4.) $\log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$

(5.) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$

(1.) $\exp(\ln x) = x,$ wobei $x > 0$

(2.) $\exp(0) = 1$

(3.) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

(4.) $\exp(x_1 - x_2) = \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}$

(5.) $\exp(a \cdot x) = \exp(x)^a$

Aufgabe 3:

- Logitvariablen:

$$\text{I: } \ln\left[\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}\right] = \xi - \beta_i \quad \text{und} \quad \text{II: } \ln\left[\frac{P(Y_j = 1 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \mid \xi)}\right] = \xi - \beta_j$$

- Gleichungen subtrahieren:

$$\text{I-II: } \ln\left[\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}\right] - \ln\left[\frac{P(Y_j = 1 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \mid \xi)}\right] = -\beta_i + \beta_j \quad \mid \cdot(-1)$$

$$\ln\left[\frac{P(Y_j = 1 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \mid \xi)}\right] - \ln\left[\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}\right] = \beta_i - \beta_j \quad \mid \exp(\ )$$

Aufgabe 3:

$$\frac{\dfrac{P(Y_j = 1 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \mid \xi)}}{\dfrac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}} = \frac{P(Y_j = 1 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \mid \xi)} \cdot \frac{P(Y_i = 0 \mid \xi)}{P(Y_i = 1 \mid \xi)} = \exp(\beta_i - \beta_j)$$

$$\frac{P(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid \xi)} = \exp(\beta_i - \beta_j) \qquad \mid \ln$$

$$\ln\left[\frac{P(Y_j = 1 \cap Y_i = 0 \mid \xi)}{P(Y_j = 0 \cap Y_i = 1 \mid \xi)}\right] = \beta_i - \beta_j$$