Strukturgleichungsmodellierung

FoV „Methodenlehre“
FSU-Jena

Dipl.-Psych. Norman Rose

Parameterschätzung, Modelltest & Fit Indizes bei SEM

Forschungsorientierte Vertiefung - Methodenlehre

Dipl.-Psych. Norman Rose

Stichprobe

- Für Strukturgleichungsmodelle mit und ohne latente Variablen gilt:
  - Gilt das spezifizierte Modell sind wahre und wahre modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix gleich: $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$
  - Gilt das spezifizierte Modell sind wahre und wahre modellimplizierte Erwartungswertstruktur $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ gleich.

- **Stichprobenproblem**
  - Weder die wahre noch die wahre modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ und $\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ sind in Anwendung gegeben.
  - Auch unter Gültigkeit des Modells in der Population sind zufällige Abweichungen in der Stichprobe möglich.
  - Modellparameter sind in Anwendung unbekannt.

Vorgehen bei SEM

- Praktisches Vorgehen:
  - Verwendung der Stichprobenschätzer:
    - Mittelwertsvektor der manifesten Variablen aus der Stichprobe als Schätzer des wahren Erwartungswertvektors $\boldsymbol{M} = \hat{\boldsymbol{\mu}}$
    - Empirische Varianz-Kovarianzmatrix **S** als Schätzer der wahren Varianz-Kovarianzmatrix: $\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$
    - Schätzung der Modellparameter unter Annahme der Gültigkeit des spezifizierten Modells (Maximum Likelihood- oder Least Square Schätzungen)

      ➔ Schätzer der wahren modellimplizierten Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$
    - Inferenzstatistischer Test auf Gleichheit von wahrer und wahrer modellimplizierter Varianz-Kovarianzmatrix aufgrund der stichprobenbasierten Schätzer

Modellidentifikation

- Die Modellparameter müssen aus dem empirischen Varianzen, Kovarianzen und Mittelwerten der manifesten Variablen geschätzt werden.

  ➔ Dementsprechend müssen alle zu schätzenden Parameter im Modell (Varianzen, Kovarianzen latenter Variablen, Intercepts und Regressionskoeffizienten) mit Hilfe empirische Kennwerte darstellbar sein. Ist dies der Fall, so ist das Modell identifiziert!

- Die **Modellidentifikation** führt zur eindeutigen mathematisch-en Darstellung der zu schätzenden Modellparameter, ggf. unter Einführung bestimmter Restriktionen.

Modellidentifikation

- Mathematisch basierte Definition der Modellidentifikation:

  – Seien $\boldsymbol{\theta}_1$ und $\boldsymbol{\theta}_2$ Vektoren mit den Modellparametern eines Modells 1 und 2 zu den gleichen Variablen. Ein Modell gilt dann als identifiziert, wenn aus der Gleichheit der modellimplzierten Varianz-Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_1)$ und $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_2)$ die Gleichheit der Parametervektoren $\boldsymbol{\theta}_1$ und $\boldsymbol{\theta}_2$ folgt.

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_1) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_2) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$$

Modellidentifikation – *t*-Regel

- In Anwendung ist es nicht immer leicht zu entscheiden, ob ein Modell identifiziert ist oder nicht.

  ➔ praktische Hilfen bieten Identifikationsregeln

- ***t*-Regel:**

  Ein Modell ist nicht identifiziert, wenn die Zahl der zu schätzenden Modellparameter die Zahl der gegebenen Varianzen, Kovarianzen und Mittelwerte unterschreitet

Modellidentifikation – *t*-Regel

- Zahl der gegebenen Varianzen und Kovarianzen

$$\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$$

- Zahl k der gegebenen Kennwerte (Varianzen, Kovarianzen und Mittelwerte) unter Einbeziehung der Erwartungswertstruktur

$$k = \left(\frac{1}{2}(p+q+1)+1\right)(p+q)$$

➔ wobei: p ist die Anzahl der exogenen manifesten Variablen X und q ist die Zahl der endogenen manifesten Variablen Y.

Modellidentifikation – *t*-Regel

- Die Zahl t ist die Differenz $k - l$, wobei l die Zahl der zu schätzenden Modellparameter ist.

- Es gilt:
  - Ist $t < 0$, so ist das Modell nicht identifiziert.
  - Ist $t = 0$, so ist das Modell gerade identifiziert.
  - Ist $t > 0$, so ist das Modell überidentifiziert.

- Bei $t > 0$, entspricht t gerade der Zahl der Freiheitsgrade (*df*).

Parameterschätzung in SEM

- Verschiedene Schätzverfahren:
  ➔ 2 große Gruppen können unterschieden werden

1. **Maximum Likelihood Schätzer (ML)**

2. **Least Square Schätzer**
   - Weighted Least Square (WLS; „verteilungsfreies Verfahren“)
   - Generalized Least Square (GLS)
   - Diagonally Weighted Least Square (DWLS)
   - Unweighted Least Square (ULS)

Parameterschätzung in SEM

- Allen Schätzverfahren ist gemeinsam, dass sie die Parameter so schätzen dass die Elemente der Residualmatrix $\boldsymbol{R_S}$ möglichst klein sind.

$$\boldsymbol{R_S} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

- Wird auch die Erwartungswertstruktur mitmodelliert, so werden außerdem die Elemente des Residualvektors $\boldsymbol{R_M}$ minimiert.

$$\boldsymbol{R_M} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{\mu}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

- **Prinzip:**
  - Modellparameter werden so geschätzt, dass die empirischen Daten maximal wahrscheinlich sind.

    ➔ mathematisch: Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion wird maximiert!
  - **In SEM: Die Diskrepanzfunktion wird minimiert!**

    ➔ Die Diskrepanzfunktion der ML-Schätzung:

$$F_{ML} = \underbrace{\log\left|\boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right| + tr\left[\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right] - \log\left|\boldsymbol{S}\right| - (p+q)}_{\text{Varianz-Kovarianzstruktur}} + \underbrace{\left[\boldsymbol{M} - \mu\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\left[\boldsymbol{M} - \mu\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]}_{\text{Erwartungswertstruktur}}$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

- ML-Schätzer sind konsistente und effiziente Schätzer, bei hinreichend großen Stichproben!

- Vorraussetzung: **Multivariate Normalverteilung** der Variablen Y_i und X_j.

- Der Funktionswert der Diskrepanzfunktion ist mit (N - 1) multipliziert χ^2-verteilt, und dient zum Modelltest.

$$(N-1)F_{ML} \rightarrow \chi^2$$

Modelltest – χ^2-Test

- **Nullhypothese: $\Sigma = \Sigma(\theta)$**

➔ wahre und wahre modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix sind gleich

- **Alternativhypothese**: $\Sigma \neq \Sigma(\theta)$

➔ wahre und wahre modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix sind nicht gleich!

- Beachte: Nullhypothese ist Wunschhypothese!

Modelltest – χ^2-Test

- **Interpretation:**

  steigende χ^2-Werte → schlechtere Modellpassung → niedrigerer p-Wert (bei gegebenen Freiheitsgraden!)

  p-Wert gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein solcher oder noch größerer χ^2-Wert auftritt, gegeben die Nullhypothese gilt.

- **Problem:**

  Bei zunehmender Stichprobengröße (wachsender Power des Tests) werden auch kleinste („irrelevante“) Modellabweichungen signifikant!

- Alternative: **Deskriptive Fit-Indizes**

Deskriptive Goodness-of-Fit-Indizes

- Vielzahl von GoF-Indizes entwickelt worden:

1. GoF-Indizes des „Overall Modelfit"
   - Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA)
   - Standardized Root Mean Square Residual (SRMR)
2. Inkrementelle GoF-Indizes
   - Nonnormed Fit Index (NNFI) und Normed Fit Index (NFI)
   - Comparative Fit Index (CFI)
3. Absolute GoF-Indizes
   - Goodness of Fit Index (GFI)
   - Adjusted Goodness of Fit Index (AGFI)
4. Prädiktive GoF-Indizes / Informationskriterien
   - Akaikes Informationskriterium (AIC)
   - Bayes Informationskriterium (BIC)
   - Expected Cross Validation Index (ECVI)

Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA)

- Diskrepanzen:

Diskrepanz zwischen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\theta}\right)$: Diskrepanz bezogen auf den Gesamtfehler

Diskrepanz zwischen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$: Diskrepanz bezogen auf die Approximation

Diskrepanz zwischen $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ und $\boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\theta}\right)$: Diskrepanz bezogen auf die Schätzung

- Beziehung zwischen den Diskrepanzen:

$$\underbrace{\Sigma-\Sigma\left(\hat{\theta}\right)}_{\text{Diskrepancy due to overall error}} = \underbrace{\left[\Sigma-\Sigma(\theta)\right]}_{\text{Diskrepancy due to approximation}} + \underbrace{\left[\Sigma(\theta)-\Sigma\left(\hat{\theta}\right)\right]}_{\text{Diskrepancy due to estimation}}$$

- Von theoretischem Interesse ist vor allem die Diskrepanz aufgrund der Approximation!

Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA)

- Der RMSEA ist ein deskriptiver Kennwert der die Diskrepanz bezogen auf die Approximation („Error of Approximation“) schätzt.

$$RMSEA = \sqrt{\max\left\{\frac{F\left[\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Sigma}\left(\hat{\theta}\right)\right]}{df} - \frac{1}{N-1}, 0\right\}} = \sqrt{\max\left\{\frac{\chi^2 - df}{df\left(N-1\right)}, 0\right\}}$$

- **Interpretation:**
  - RMSEA < 0.05 gute Modellpassung
  - 0.05 < RMSEA < 0.08 adäquate/mäßige Modellpassung
  - RMSEA > 0.08 schlechte Modellpassung

Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA)

- Üblicherweise wird das 90%-Konfidenzintervall für den RMSEA angegeben!

- Sog. „**Test of close fit**“:

  - Nullhypothese: RMSEA $\leq$ 0.05

  ➔ Nullhypothese kann beibehalten werden, wenn die untere Intervallgrenze des 90%-Konfidenzintervalls kleiner als 0.05 ist.

Standardized Root Mean Square Residual (SRMR)

- SRMR entspricht approximativ dem mittleren absoluten Residuum der Residualkorrelationen.

$$SRMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\left[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{\sqrt{\hat{\sigma}_i}\sqrt{\sigma_j}}}{(p+q)(p+q+1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[Kor_{ij} - \frac{\sigma_{ij}\left(\hat{\theta}\right)}{\sqrt{\hat{\sigma}_i}\sqrt{\hat{\sigma}_j}}\right]^2}{(p+q)(p+q+1)}}$$

- Interpretation:
  - SRMR = 0 ➔ perfekte Modellpassung
  - SRMR < 0.05 ➔ gute Modellpassung
  - 0.05 < SRMR < 0.10 ➔ adäquate/mäßige Modellpassung

Nonnormed Fit Index (NNFI)

- **Nonnormed Fit Index (NNFI)** oder sog. Tucker-Lewis Index (TLI) ist eine inkrementeller Fit-Index!

- **Prinzip** der **inkrementellen Fit-Indizes**:
  - Basieren auf dem Modellvergleich zwischen dem theoretisch spezifizierten Modell und dem Basismodell!
  - Das gewählte Basismodell ist meist das sog. Unabhängigkeitsmodell das von unkorrelierten manifesten Variablen ausgeht (Annahme, dass **Σ** eine Diagonalmatix ist!).
  - Berechnung der χ^2-Werte für das theoretisch spezifizierten Modell und das Basismodell χ_b^2

Nonnormed Fit Index (NNFI)

- Berechnung:

$$NNFI = \left(\frac{\chi_b^2}{df_b} - \frac{\chi^2}{df} \right) : \left(\frac{\chi^2}{df} - 1 \right)$$

- Interpretation:
  - NNFI > 0.97 ➔ gute Modellpassung
  - 0.95 < NNFI < 0.97 ➔ adäquate/mäßige Modellpassung
  - NNFI = 1.0 ➔ perfekte Modellpassung
  - NNFI > 1.0 ➔ „Overfitting“ im Modell sind mehr Parameter spezifiziert als nötig

Goodness of Fit Index (GFI)

- Goodness of Fit Index (GFI) ist ein absoluter GoF-Index
- **Prinzip** der **absoluten Fit-Indizes**:
  - Geben den relativen Anteil der Varianzen und Kovarianzen aller manifesten Variablen an, die durch das Modell erklärt wird.
- **Berechnung**:

$$GFI = 1 - \frac{\chi^2}{\chi_b^2}$$

- **Interpretation**:
  - GFI = 1.0 ➔ perfekte Modellpassung
  - GFI > 0.95 ➔ gute Modellpassung
  - 0.90 < GFI < 0.95 ➔ adäquate/mäßige Modellpassung
  - GFI < 0.90 ➔ schlechte Modellpassung