Strukturgleichungsmodellierung

FoV „Methodenlehre“
FSU-Jena

Dipl.-Psych. Norman Rose

Strukturgleichungsmodelle mit latenten Variablen

Forschungsorientierte Vertiefung - Methodenlehre

Dipl.-Psych. Norman Rose

Agenda

- Modelle mit latenten Variablen

- Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte in SEM
  - Modellspezifikation bei Pfadanalysen
    - Varianz-Kovarianzmatrix bei Pfadanalysen
    - Erwartungswertvektoren bei Pfadanalysen
  - Modellspezifikation bei Latenten-Variablen-Modellen
    - Varianz-Kovarianzmatrix bei Latenten-Variablen-Modellen
    - Erwartungswertvektoren bei Latenten-Variablen-Modellen

Modelle mit latenten Variablen

- **Warum latente Variablen?**
  - In psychologischen Fragestellungen sind Zusammenhänge, Varianzen, … , bzgl. nicht direkt beobachtbarer Konstrukte von Interesse.
  - **Korrelationen und Regressionskoeffizienten sind durch Messfehler gemindert**!

- Seine zwei manifeste Testwertvariablen, die messfehlerbehaftet sind, so folgt nach den Definitionen der **klassischen Testtheorie**:

$$Y_1 = \tau_1 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \tau_2 + \varepsilon_2$$

Modelle mit latenten Variablen

$$Kor(Y_1,Y_2)=\frac{Cov(Y_1,Y_2)}{Std(Y_1)Std(Y_2)}=\frac{Cov(\tau_1+\varepsilon_1,\tau_2+\varepsilon_2)}{Std(\tau_1+\varepsilon_1)Std(\tau_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{Cov(\tau_1,\tau_2)}{\sqrt{Var(\tau_1)+Var(\varepsilon_1)}\sqrt{Var(\tau_2)+Var(\varepsilon_2)}} \quad \mid \; Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$$

$$Kor(\tau_1,\tau_2)=\frac{Cov(\tau_1,\tau_2)}{\sqrt{Var(\tau_1)}\sqrt{Var(\tau_2)}}$$

$$\frac{Cov(\tau_1,\tau_2)}{\sqrt{Var(\tau_1)}\sqrt{Var(\tau_2)}} \geq \frac{Cov(\tau_1,\tau_2)}{\sqrt{Var(\tau_1)+Var(\varepsilon_1)}\sqrt{Var(\tau_2)+Var(\varepsilon_2)}}$$

$$Kor(\tau_1,\tau_2)\geq Kor(Y_1,Y_2)$$

Modelle mit latenten Variablen

- Regressionskoeffizienten und Messfehler:

$$E(Y_1 \mid Y_2) = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2$$

$$E(\tau_1 \mid \tau_2) = \alpha_0^* + \alpha_1^* \tau_2$$

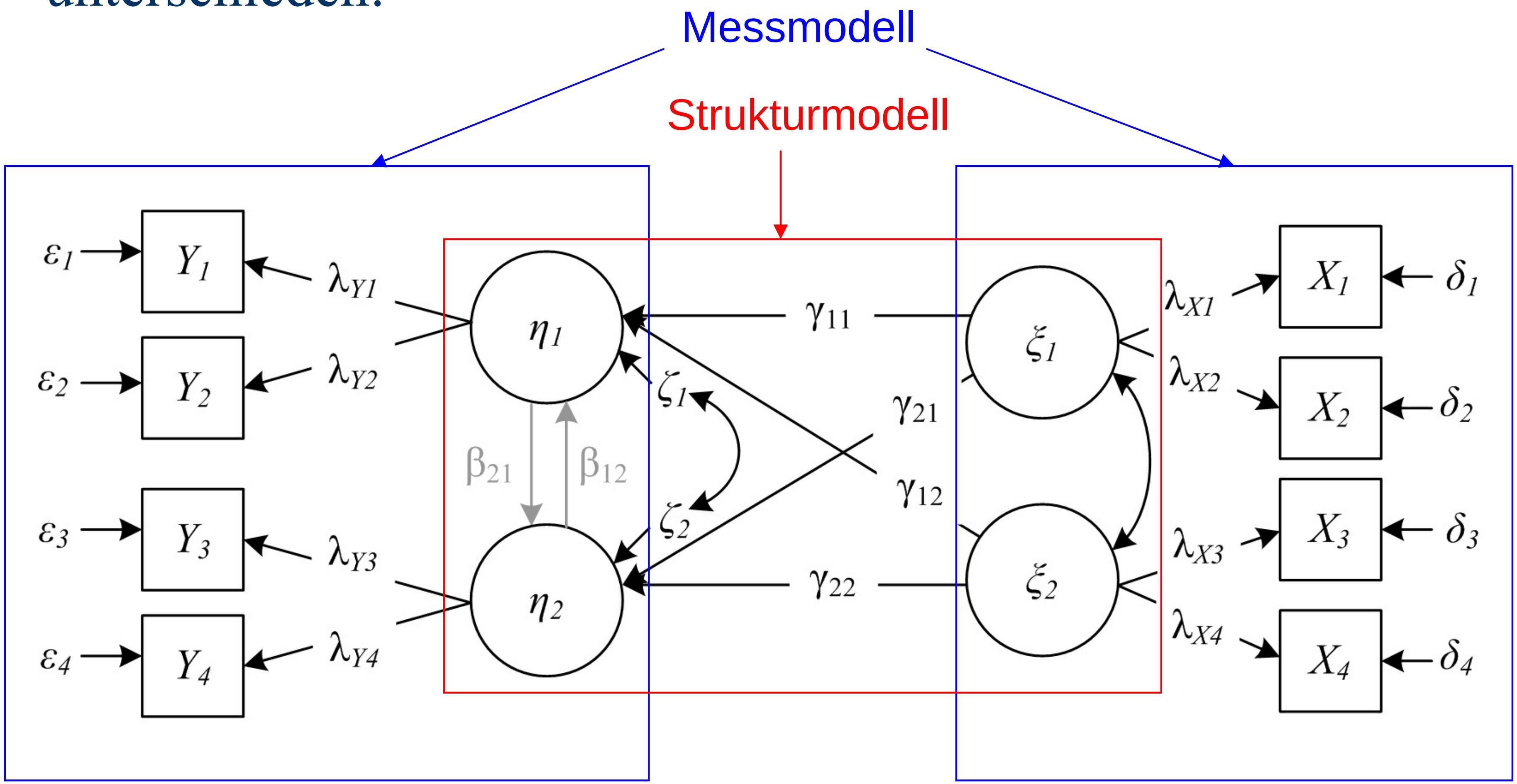
$$\alpha_1 = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{Var(Y_1)} = \frac{Cov(\tau_1 + \varepsilon_1, \tau_2 + \varepsilon_2)}{Var(\tau_1) + Var(\varepsilon_1)} = \frac{Cov(\tau_1, \tau_2)}{\sqrt{Var(\tau_1) + Var(\varepsilon_1)}}$$

$$\alpha_1^* = \frac{Cov(\tau_1, \tau_2)}{Var(\tau_1)}$$

- es folgt: $\alpha_1 \leq \alpha_1^*$

Modelle mit latenten Variablen

- In Strukturgleichungsmodellen mit latenten Variablen wird zwischen dem Messmodell und dem Strukturmodell unterschieden:



Modelle mit latenten Variablen

- Modellgleichungen:
  - **Messmodell**:
    $$\boldsymbol{Y} = \mathbf{v}_Y + \Lambda_Y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
    $$\boldsymbol{X} = \mathbf{v}_X + \Lambda_X \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$$

    ➔ In *Mplus* gibt es keine Variablen ξ, somit entfällt das Messmodell für die latenten exogenen Variablen (nur in *LISREL*!)

  - **Strukturmodell**:

    ➔ in *LISREL* : $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$

    ➔ in *Mplus* : $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}$

Modelle mit latenten Variablen

- Parametermatrizen (grau = nur *LISREL*):

$\boldsymbol{Y} =$ Vektor der manifesten Variablen Y_i

$\boldsymbol{X} =$ Vektor der manifesten Variablen X_j

$\mathbf{v}_Y =$ Vektor der Intercepts der Regressionen $E(Y_i \mid \boldsymbol{\eta})$

$\mathbf{v}_X =$ Vektor der Intercepts der Regressionen $E(X_j \mid \xi)$

$\Lambda_Y =$ Matrix der Regressionskoeff. der Regressionen $E(Y_i \mid \boldsymbol{\eta})$

$\Lambda_X =$ Matrix der Regressionskoeff. der Regressionen $E(X_j \mid \xi)$

$\boldsymbol{\varepsilon} =$ Vektor der Residuen der Regressionen $E(Y_i \mid \boldsymbol{\eta})$

$\delta =$ Vektor der Residuen der Regressionen $E(X_j \mid \xi)$

$\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon =$ Var.-Kov.-Matrix der Residuen ε_i

$\boldsymbol{\Theta}_\delta =$ Var.-Kov.-Matrix der Residuen δ_j

Modelle mit latenten Variablen

- Parametermatrizen (grau = nur *LISREL*):

$\boldsymbol{\eta} =$ Vektor der latenten endogenen Variablen η_k

$\xi =$ Vektor der latenten exogenen Variablen ξ_l

$\boldsymbol{\zeta} =$ Vektor der Residuen der Regressionen $E(\eta_k \mid \boldsymbol{\eta}, \xi)$

$\boldsymbol{\alpha} =$ Vektor der Intercepts der Regressionen $E(\eta_k \mid \boldsymbol{\eta}, \xi)$

$\mathbf{B} =$ Matrix der Regressionskoeff. $\xi_l \rightarrow \eta_k$

$\boldsymbol{\Gamma} =$ Matrix der Regressionskoeff. $\eta_m \rightarrow \eta_k$

$\boldsymbol{\Phi} =$ Var.-Kov.-Matrix der exogenen Variablen ξ_l

$\boldsymbol{\Psi} =$ Var.-Kov.-Matrix der Residuen ζ_k

Vorläufige Zusammenfassung

- Strukturgleichungsmodelle mit latenten Variablen sind eine Verbindung von Faktorenanalyse und Pfadanalyse

- Entsprechend gibt es zwei Modellgleichungen. Eine für das Messmodell („faktorenanalytischer Anteil“) und eine zweite für das Strukturmodell („pfadanalytischer Anteil“)

- Die Strukturgleichungsmodellierung mit latenten Variablen erlaubt die Schätzung von Varianzen, Kovarianzen, Regressionskoeffizienten, etc. von/zwischen messfehlerbereinigten Variablen.

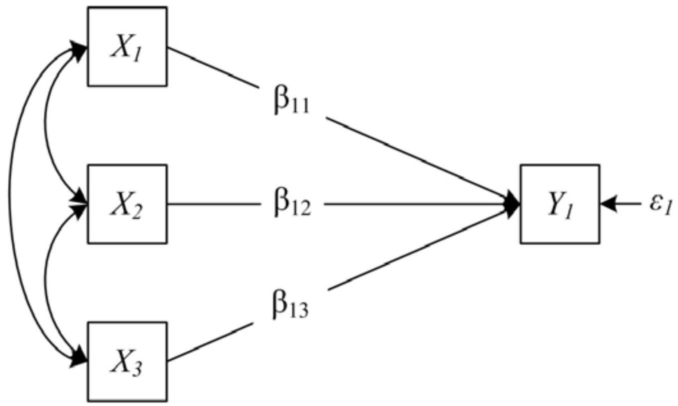
Datengrundlage in SEM

- Die Parameterschätzung und Modellgeltungkontrolle erfolgt auf der Basis der Varianz-Kovarianzmatrix ***S*** der manifesten Variablen, sowie deren Mittelwerte ***M*** in der Stichprobe.

Stichprobe		**Population**
$\boldsymbol{S}$	$\xrightarrow{\text{Schätzer}}$	$\boldsymbol{\Sigma}$
$\boldsymbol{M}$	$\xrightarrow{\text{Schätzer}}$	$\boldsymbol{\mu}$

Datengrundlage in SEM

- Wahre Varianz-Kovarianzmatrix Σ am Bsp. der multiplen Regression:



$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(Y_1) & & & \\ Cov(Y_1, X_1) & Var(X_1) & & \\ Cov(Y_1, X_2) & Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) & \\ Cov(Y_1, X_3) & Cov(X_1, X_3) & Cov(X_2, X_3) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$

Datengrundlage in SEM

- Aufgrund der Modellgleichung folgt die **Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix Σ(θ)**:

$$\text{Modellgleichung: } Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

- Elemente aus **Σ(θ)**:

$$Var(Y_1) = \beta_1^2\sigma_{X_1}^2 + \beta_2^2\sigma_{X_2}^2 + \beta_3\sigma_{X_3}^2 + \beta_1\beta_2\sigma_{X_1,X_2} + \beta_1\beta_3\sigma_{X_1,X_3} + \beta_2\beta_3\sigma_{X_2,X_3} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov(Y_1, X_1) = \beta_1\sigma_{X_1}^2 + \beta_2\sigma_{X_1,X_2} + \beta_3\sigma_{X_1,X_3}$$

$$Cov(Y_1, X_2) = \beta_1\sigma_{X_1,X_2} + \beta_2\sigma_{X_2}^2 + \beta_3\sigma_{X_3,X_2}$$

$$Cov(Y_1, X_3) = \beta_1\sigma_{X_1,X_3} + \beta_2\sigma_{X_2,X_3} + \beta_3\sigma_{X_3}^2$$

Datengrundlage in SEM

- Wahre Erwartungswertstruktur am Bsp. der multiplen Regression:

$$\begin{bmatrix} E(Y_1) \\ E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \end{bmatrix}$$

- modellimplizierte Erwartungswertstruktur:

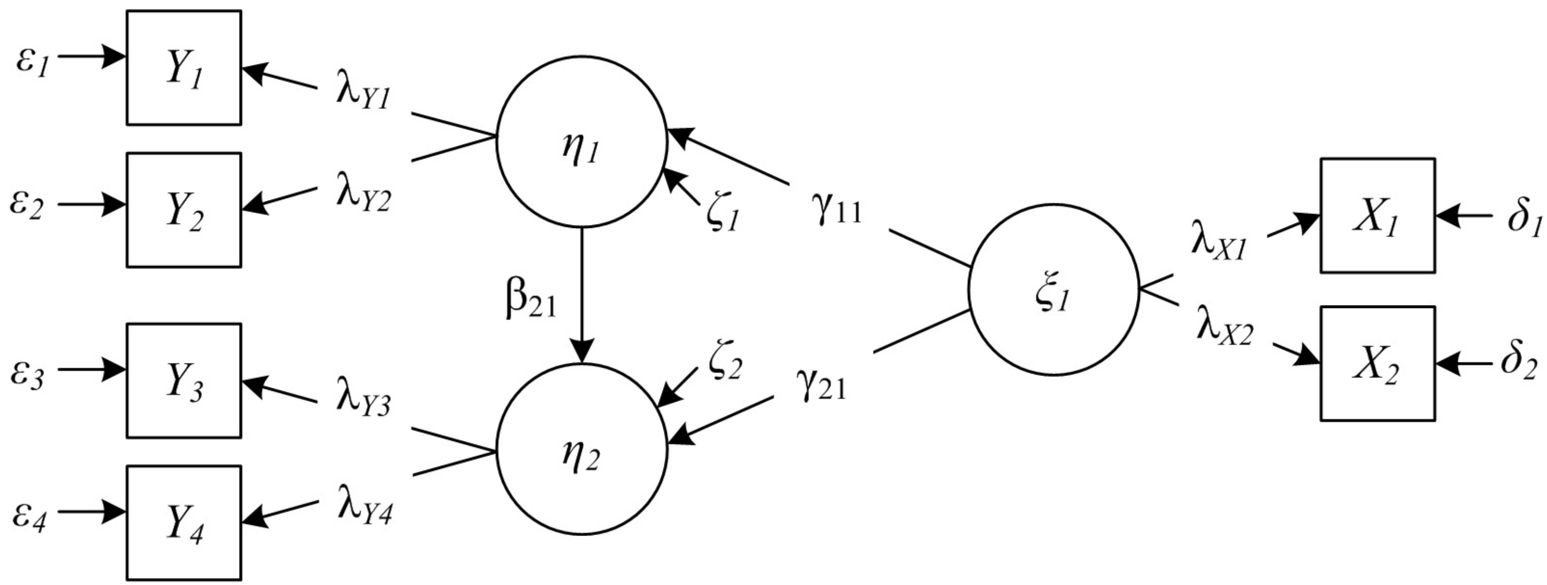
$$\begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 E(X_1) + \beta_2 E(X_2) + \beta_3 E(X_3) \\ E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \end{bmatrix}$$

Modellspezifikation

- Die Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix als auch die modellimplizierte Erwartungswertstruktur ergibt sich aus der **Modellspezifikation**!
- Nach der **Modellspezifikation** kann jedes Element der Varianz-Kovarianzmatrix und des Erwartungswertvektors mit gegebenen und/oder zu schätzenden Modellparametern dargestellt werden!
- Die Modellspezifikation ist Resultat der Übersetzung inhaltlicher Hypothesen in Regressionsgleichungen und Parameterrestriktionen.

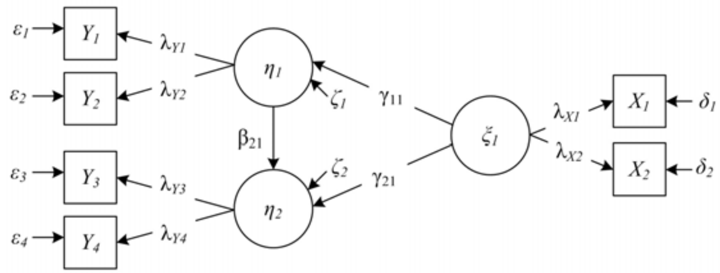
Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Beispiel:



Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Varianz-Kovarianzmatrix
  am Beispiel:



$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(Y_1) & & & & & \\ Cov(Y_1,Y_2) & Var(Y_2) & & & & \\ Cov(Y_1,Y_3) & Cov(Y_2,Y_3) & Var(Y_3) & & & \\ Cov(Y_1,Y_4) & Cov(Y_2,Y_4) & Cov(Y_3,Y_4) & Var(Y_4) & & \\ Cov(Y_1,X_1) & Cov(Y_2,X_1) & Cov(Y_3,X_1) & Cov(Y_4,X_1) & Var(X_1) & \\ Cov(Y_1,X_2) & Cov(Y_2,X_2) & Cov(Y_3,X_2) & Cov(Y_4,X_2) & Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{pmatrix}$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix enthält auch bei latenten Variablenmodellen wiederum nur die Varianzen und Kovarianzen der manifesten Variablen *X* und *Y*!

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Messmodell am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{Y1} \\ \nu_{Y2} \\ \nu_{Y3} \\ \nu_{Y4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{Y1} & 0 \\ \lambda_{Y2} & 0 \\ 0 & \lambda_{Y3} \\ 0 & \lambda_{Y4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

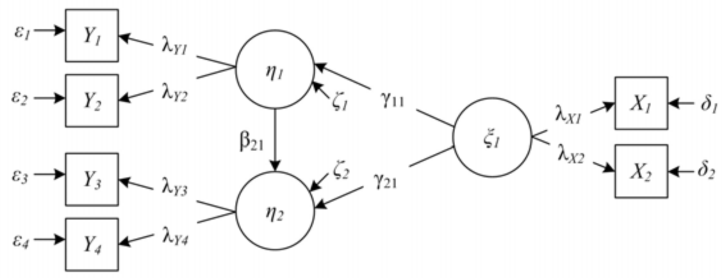
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{X1} \\ \nu_{X2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{X1} \\ \lambda_{X2} \end{pmatrix} \times \xi_1 + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

- Strukturmodell am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \times \xi_1 + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Varianz-Kovarianzmatrix
  am Beispiel:

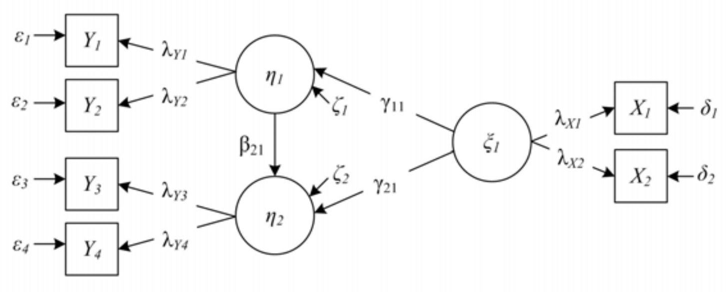


- Elemente aus $\mathbf{\Sigma}_{YY}$

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(\nu_{Y1} + \lambda_{Y1}\eta_1 + \varepsilon_1, \nu_{Y2} + \lambda_{Y2}\eta_1 + \varepsilon_2)$$
$$= \lambda_{Y1}\lambda_{Y2}Var(\eta_1)$$
$$= \lambda_{Y1}\lambda_{Y2}Var(\alpha_1 + \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1)$$
$$= \lambda_{Y1}\lambda_{Y2}\left[\gamma_{11}^2 Var(\xi_1) + Var(\zeta_1)\right]$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

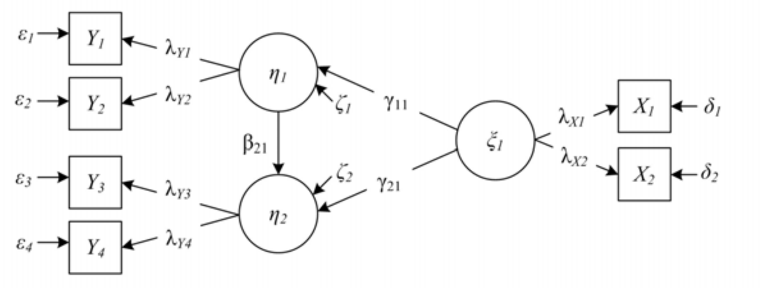
- Varianz-Kovarianzmatrix am Beispiel:
- Elemente aus $\boldsymbol{\Sigma}_{YY}$



$$
\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_3) &= Cov(\nu_{Y1} + \lambda_{Y1}\eta_1 + \varepsilon_1, \nu_{Y3} + \lambda_{Y3}\eta_2 + \varepsilon_3) \\
&= \lambda_{Y1}\lambda_{Y3} Cov(\eta_1, \eta_2) \\
&= \lambda_{Y1}\lambda_{Y3} Cov(\alpha_1 + \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1, \alpha_2 + \gamma_{21}\xi_1 + \beta_{21}\eta_1 + \zeta_2) \\
&= \lambda_{Y1}\lambda_{Y3}\left[\gamma_{11}\gamma_{21} Var(\xi_1) + \gamma_{11}\beta_{21} Cov(\xi_1, \eta_1) + Var(\zeta_2)\right] \\
&= \lambda_{Y1}\lambda_{Y3}\left[\gamma_{11}\gamma_{21} Var(\xi_1) + \gamma_{11}\beta_{21} Cov(\xi_1, \alpha_1 + \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1) + Var(\zeta_2)\right] \\
&= \lambda_{Y1}\lambda_{Y3}\left[(\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{11}^2\beta_{21}) Var(\xi_1) + \gamma_{11}\beta_{21} Var(\zeta_1) + Var(\zeta_2)\right]
\end{aligned}
$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Varianz-Kovarianzmatrix
  am Beispiel:



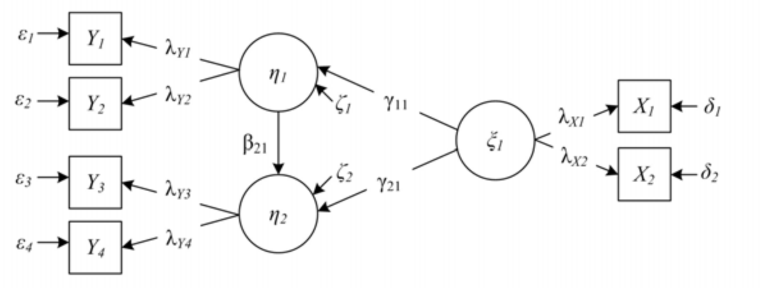
$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{\Sigma}_{YY} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \end{array}$$

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cccc|cc} Var(Y_1) & & & & & \\ Cov(Y_1,Y_2) & Var(Y_2) & & & & \\ Cov(Y_1,Y_3) & Cov(Y_2,Y_3) & Var(Y_3) & & & \\ Cov(Y_1,Y_4) & Cov(Y_2,Y_4) & Cov(Y_3,Y_4) & Var(Y_4) & & \\ \hline Cov(Y_1,X_1) & Cov(Y_2,X_1) & Cov(Y_3,X_1) & Cov(Y_4,X_1) & Var(X_1) & \\ Cov(Y_1,X_2) & Cov(Y_2,X_2) & Cov(Y_3,X_2) & Cov(Y_4,X_2) & Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XX} \end{array}$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Varianz-Kovarianzmatrix
  am Beispiel:



- Die Gesamte Varianz-Kovarianzmatrix kann als Zusammensetzung mehrerer Varianz-Kovarianzmatrizen dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{YY} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XX} \end{pmatrix}$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix – Allgemein:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{YY} &= \boldsymbol{Cov}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}) \\
&= Cov(\mathbf{v}_Y + \boldsymbol{\Lambda}_Y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}_Y + \boldsymbol{\Lambda}_Y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y Cov(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\Lambda}'_Y + Cov(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y Cov\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta),(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta)\right]\boldsymbol{\Lambda}'_Y + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\Gamma} Cov(\xi,\xi)\boldsymbol{\Gamma}'\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\right]' + (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} Cov(\zeta,\zeta)\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\right]'\right]\boldsymbol{\Lambda}'_Y + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}'+\boldsymbol{\Psi})\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\right]'\right]\boldsymbol{\Lambda}'_Y + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon
\end{aligned}$$

- Beachte:

$$\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}) &= Cov(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta, \boldsymbol{\alpha}+\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta) \\
&= Cov\left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta),(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\xi+\zeta)\right]
\end{aligned}$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix – Allgemein:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{YX} &= Cov(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \\
&= Cov(\mathbf{v}_Y + \boldsymbol{\Lambda}_Y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}_X + \Lambda_X \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y Cov(\boldsymbol{\eta}, \xi) \boldsymbol{\Lambda}'_X \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y Cov\left[(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} (\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \zeta), \xi \right] \boldsymbol{\Lambda}'_X \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_Y (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}'_X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{XY} &= \boldsymbol{\Sigma}'_{YX} \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Gamma}' \left[(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \right]' \boldsymbol{\Lambda}'_Y
\end{aligned}
$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix – Allgemein:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{XX} &= Cov(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) \\
&= Cov(\mathbf{v}_X + \boldsymbol{\Lambda}_X \xi + \boldsymbol{\delta}, \mathbf{v}_X + \boldsymbol{\Lambda}_X \xi + \boldsymbol{\delta}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_X Cov(\xi, \xi) \boldsymbol{\Lambda}'_X + Cov(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}'_X + \boldsymbol{\Theta}_\delta
\end{aligned}
$$

Modellspezifikation bei SEM mit latenten Variablen

- Modellimplizierte Varianz-Kovarianzmatrix – Allgemein:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{YY} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XX} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_Y \left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} (\boldsymbol{\Gamma\Phi\Gamma}' + \boldsymbol{\Psi}) \left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} \right]' \right] \boldsymbol{\Lambda}'_Y + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon & \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi\Gamma}' \left[(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} \right]' \boldsymbol{\Lambda}'_Y \\ \boldsymbol{\Lambda}_Y (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} \boldsymbol{\Gamma\Phi\Lambda}'_X & \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi\Lambda}'_X + \boldsymbol{\Theta}_\delta \end{pmatrix}$$