1 Matrixdarstellung von Strukturgleichungsmodellen

1.1 Einführung

Ein in `Mplus` mit Hilfe der Syntax-Statements spezifiziertes Modell wird zur Modellschätzing in Matrizenform repräsentiert. Aus diesen Matrizen läßt sich die implizierte Varianz-Kovarianzmatrix und die implizierte Erwartungswertstruktur errechnen, welche durch das Modell spezifiziert ist.

Die Schätzung der Modellparameter erfolgt durch die Minimierung der Abweichung zwischen empirischer Varianz-Kovarianz-Matrix (S) und der vom Modell implizierten Varianz-Kovarianz-Matrix ($\Sigma(\hat{\theta})$, siehe ...). Die empirische Varianz-Kovarianz-Matrix kann dabei direkt aus den Daten ermittelt werden bzw. wird `Mplus` als Rohdaten übergeben. Die vom Modell implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix lässt sich aus den spezifizierten Matrizen errechnen (siehe ...).

Da die Schätzung der Modellparameter auf Ebene der Varianz-Kovarianz-Matrizen und Erwartungswerte geschieht, werden von

- latenten Variablen nur ihre Varianzen, ihre Erwartungswerte und die Kovarianzen unter den latenten Variablen als Parameter geschätzt und von
- Residuen nur die Varianzen und Kovarianzen als Modellparameter berücksichtigt[1].

Für alle im Modell vorkommenden Regressionen werden jeweils die Intercepts und Ladungen geschätzt, wobei die Intercepts für die implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix nicht von Bedeutung sind, sondern nur bei der implizierten Erwartungswertstruktur eine Rolle spielen.

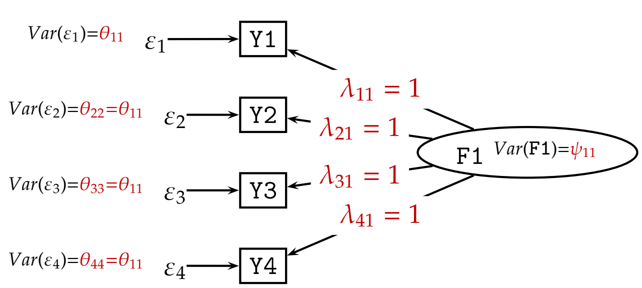
1.2 Matrixdarstellung in Mplus

1.2.1 Ein einführendes Beispiel

Betrachten wir zunächst ein einfaches Messmodell einer latenten Variablen `F1` gemessen durch 4 parallele Indikatoren (Modell paralleler Variablen, siehe ...) und beschränken wir uns auf eine Analyse auf Ebene der Varianz-Kovarianz-Matrix (ohne implizierte Erwartungswertstruktur):

```
F1 BY Y1@1 Y2@1 Y3@1 Y4@1;

      Y1(theta11);
      Y1(theta11);
      Y1(theta11);
      Y1(theta11);
```



In diesem Modell sind folgende **zu schätzende Parameter** enthalten:

- Die Varianz von `F1` ($Var(\mathtt{F1}) = \psi_{11}$) ist ein Parameter des Modells, dessen Wert zur Ermittlung der vom Modell implizierten Varianz-Kovarianz-Matrix notwendig ist.

[1] Die Erwartungswerte von Residuen sind ja 0.

- Die Varianzen der Residuen ε_1, ε_2, ε_3 und ε_4 ($Var(\varepsilon_1) = \theta_{11}$, $Var(\varepsilon_2) = \theta_{22} = \theta_{11}$, $Var(\varepsilon_3) = \theta_{33} = \theta_{11}$ und $Var(\varepsilon_4) = \theta_{44} = \theta_{11}$) sind ein gemeinsamer Modellparameter, d.h. sie werden zur Berechnung der vom Modell implizierten Varianzen für alle `Y` Variablen verwendet, aber nur als ein (gemeinsamer) Parameter geschätzt.

Zusätzlich sind **von Null verschiedene Konstanten** in dem Modell enthalten:

- Die Ladungen der latenten Variablen `F1` auf die manifesten Variablen `Y1`, `Y2`, `Y3` und `Y4` ($\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{31} = 1$ und $\lambda_{41} = 1$) sind Konstanten mit dem Wert 1, d.h. werden nicht geschätzt und als 1 bei der Ermittlung der vom Modell implizierten Varianz-Kovarianz-Matrix verwendet.

Abschließend die **auf Null fixierten Konstanten**:

- Die Kovarianzen zwischen den Residuen $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ sind für alle $i \neq j$ auf 0 fixiert.

Die auf Null fixierten Konstanten sind nicht im Pfaddiagramm sichtbar. Alle besprochenen Parameter und Konstanten können nun in Matrizenform zusammengefasst werden. Beginnen wir mit der Varianz der latenten Variable, die einen frei zu schätzenden Parameter des Beispielmodells darstellt.

Ψ: Varianzen und Kovarianzen exogener latenter Variablen und Residuen endogener latenter Variablen.

Die zu schätzende Varianz der latenten Variablen `F1` wird mit dem Parameter ψ_{11} bezeichnet. Es ist die erste (und einzigste) latente Variable in dem Modell. Sie steht folglich in der Matrix Ψ in Zeile 1 und Spalte 1. Die Matrix hat die Größe $m \times m$ mit m als Anzahl der latenten Variablen. In dem Beispiel ist $m = 1$, d.h. die Ψ-Matrix sieht folgendermassen aus:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{11}] \tag{1}$$

Θ: Varianzen und Kovarianzen der Residuen manifester Variablen.

Wenden wir uns nun den Fehlern zu. Aus der Anzahl der manifesten Variablen lässt sich ableiten, wie viele Fehlervarianzen das Modell haben muss: Da es 4 manifeste Variablen gibt, muss die Matrix mindestens $p = 4$ Elemente beherbergen (die Parameter für die Varianzen).

Zusätzlich bieten Strukturgleichungsmodelle prinzipiell die Möglichkeit, einzelne Kovarianzen zwischen Fehlern frei zu schätzen. Die Matrix hat deshalb die Form $p \times p$, und sie ist (weil es sich damit um eine Varianz-Kovarianz-Matrix der Fehler handelt) symmetrisch. Es ist üblich, nur die Elemente in und unter der Diagonalen aufzuschreiben; tatsächlich verwendet wird sie jedoch als symmetrische Matrix. In dem Beispiel sind alle Kovarianzen zwischen Fehlern auf 0 fixiert. Für das Beispielmodell wird also nur die Diagonale benötigt (in der die Varianzen der Fehlervariablen stehen). Alle anderen Elemente der Matrix sind 0.

Schließlich wissen wir über die Fehler auch, dass die Varianz der Residuen von `Y1`, `Y2`, `Y3` und `Y4` als eine gemeinsame Fehlervarianz geschätzt werden soll (s.o.). In allen Diagonalenelemente steht also der gleiche Parameter (θ_{11}).

Fassen wir alle Aspekte zusammen ergibt sich für die Θ-Matrix:

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & & & \\ 0 & \theta_{11} & & \\ 0 & 0 & \theta_{11} & \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Λ: Ladungen der latenten Faktoren auf die manifesten Variablen.

Bleibt noch eine Matrix zu spezifizieren, welche die Ladungen der latenten Variablen `F1` auf die manifesten Variablen angibt. Diese Matrix hat die Form $p \times m$, also Anzahl der manifesten Variablen (Zeilen) *mal* Anzahl der latenten Variablen (Spalten).

Die Ladungen sind in diesem Beispielmodell keine Parameter sondern feste unveränderliche Zahlen (ungleich Null). In der Λ - Matrix (die in unserem Beispiel eine 4×1 Matrix ist) stehen also nur feste Zahlen:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{bzw. transponiert} \quad \mathbf{\Lambda}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Zusammenfassung: Die vollständige vom Modell implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix für kontinuierliche manifeste Variablen und kontinierliche latente Variablen ist in `Mplus`-Matrizen darstellbar als:

$$\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}) = \mathbf{\Lambda}(I - B)^{-1}\mathbf{\Psi}(I - B)'^{-1}\mathbf{\Lambda}' + \mathbf{\Theta}. \tag{4}$$

Die noch nicht eingeführte Matrix B beinhaltet die Regressionskoeffizienten zwischen kontinuierlichen latenten Variablen. Da keine Regressionsen zwischen latenten Variablen in dem Beispielmodell enthalten sind, ist diese Matrix B in hier eine Nullmatrix. Dadurch entfallen die Terme $(I - B)^{-1} = [1]$ und $(I - B) = [1]$ aus der Modellgleichung und es ergibt sich:

$$\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}) = \mathbf{\Lambda\Psi\Lambda}' + \mathbf{\Theta} \tag{5}$$

Setzen wir die Matrizen Ψ, Θ und Λ in die Modellgleichung der vom Modell implizierten Varianz-Kovarianzmatrix $\Sigma(\hat{\theta})$ ein ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\hat{\theta}) &= \Lambda\Psi\Lambda' + \Theta \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\psi_{11}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{11} \end{bmatrix} && \textit{Matrizen einsetzen} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{11} \\ \psi_{11} \\ \psi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{11} \end{bmatrix} && \boldsymbol{\Lambda\Psi}\ \textit{ausrechnen} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{11} \end{bmatrix} && \textit{weiter mit } \boldsymbol{\Lambda'}\ \textit{multiplizieren} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{11}+\theta_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} & \psi_{11} \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} \end{bmatrix} && \textit{Matrizen addieren} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{11}+\theta_{11} & & & \\ \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} & & \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} & \\ \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11} & \psi_{11}+\theta_{11} \end{bmatrix} && \textit{Symmetrischen Teil streichen}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Überprüfen wir dieses Ergebnis mit dem schon bekannten Vorgehen, die vom Modell implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix mit Hilfe der einzelnen Regressionsgleichungen auszurechnen. Das Pfaddiagramm kann in folgende Regressionen zerlegt werden:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \nu_1 + \lambda_{11}\texttt{F1} + \varepsilon_1 = \texttt{F1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \nu_2 + \lambda_{21}\texttt{F1} + \varepsilon_1 = \texttt{F1} + \varepsilon_2 \\
Y_3 &= \nu_3 + \lambda_{31}\texttt{F1} + \varepsilon_1 = \texttt{F1} + \varepsilon_3 \\
Y_4 &= \nu_4 + \lambda_{41}\texttt{F1} + \varepsilon_1 = \texttt{F1} + \varepsilon_4
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Betrachten wir unter Verwendung der Rechenregeln die Varianzen der manifesten Variablen, so folgt für jede manifeste Variable i:

$$
Var(Y_i) = Var(\lambda_{i1}\texttt{F1} + \varepsilon_i) = \lambda_{i1}^2 Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) = Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) \tag{8}
$$

Schließlich lässt sich aus den Regressionsgleichungen und den Eigenschaften von Residuen auch die implizierte Struktur für die Kovarianz zwische Y_i und Y_j (für $i \neq j$) ableiten:

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_i, Y_j) &= Cov(\lambda_{i1}\texttt{F1} + \varepsilon_i, \lambda_{j1}\texttt{F1} + \varepsilon_j) \\
&= \lambda_{i1}\lambda_{j1} Var(\texttt{F1}) = Var(\texttt{F1})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Dies entspricht genau der Matrixdarstellung der vom Modell implizierten Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma(\hat{\theta})$, wie sie auch mit Hilfe der `Mplus`-Matrizen ermittelt wurde:

$$
\begin{bmatrix} Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) & & & \\ Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) & & \\ Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) & \\ Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) & Var(\texttt{F1}) + Var(\varepsilon_i) \end{bmatrix} \tag{10}
$$

Wenden wir uns nun dem Mittelwertsmodell zu und erweitern das Beispiel um die dazu notwendige Spezifikation. Für das Modell paralleler Variablen gilt (siehe ...), dass die Erwartungswerte aller manifesten Variablen gleich dem Erwartungswert der latenten Variablen sind. Die Intercepts der Regressionen von `Y1`, `Y2`, `Y3` und `Y4` auf `F1` sind müssen dazu jeweils auf 0 fixiert werden und der Erwartungswert der latenten Variablen wird frei geschätzt[2].

ν: Mittelwerte und Intercepts der (kontinuierlichen) manifesten Variablen

Die auf 0 fixierten Intercepts der manifesten Variablen werden in einem Vektor spezifiziert, welcher die Form $p \times 1$ hat. Ein Intercept für jede manifeste Variable, d.h. für unser Beispiel:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

α: Mittelwerte und Intercepts der (kontinuierlichen) latenten Variablen

Da in dem Beispielmodell nur eine latente Variable enthalten ist, und da der Vektor von Intercepts und Mittelwerten der latenten Variablen die Form $m \times 1$ hat, ergibt sich:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Setzen wir diese beiden Vektoren in die vom Modell implizierte Erwartungswertstruktur[3] ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) = \; & \nu + \Lambda\alpha \\ = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Auch diese Form entspricht offensichtlich der vom Modell implizierten Erwartungswerstruktur für das Modell paralleler Tests, wie sie auch mit Hilfe der Rechenregeln aus den Regressionsgleichungen hätte ermittelt werden können.

---

[2] Dazu erweitern wir die Modellspezifikation um die Fixierung der Intercepts der manifesten Variablen

```
[Y1@0];
[Y2@0];
[Y3@0];
[Y4@0];
```

und die Freisetzung des Erwartungswerts der latenten Variablen

`[F1*];`.

Die hier verwendete Syntax, d.h. das Nennen der Variablen in eckigen Klammern ist die in `Mplus` übliche Notation, um Intercepts und Erwartungswerte zu spezifizieren. Ob es sich bei einem Term `[Variablenname]` um einen Erwartungswert oder ein Intercept handelt ist nur aus dem Kontext der konkreten Variable zu entscheiden. Ist die Variable endogen (d.h. sie wird durch andere Variablen im Modell erklärt) dann handelt es sich um das Intercept; Ist die Variable exogen (d.h. sie wird nicht weiter erklärt) dann bezieht sich der Ausdruck auf ihren Erwartungswert.

[3] Auch für die implizierte Erwartungswertstruktur wurde für die Übersichtlichkeit wieder vereinfacht: $(I-B)^{-1}$ ist für das Beispielmodell weiterhin [1] und entfällt damit. Die Matrix Γ und der Vektor K wurden weggelassen, da sie im Beispielmodell nicht vorkommen, siehe ... .

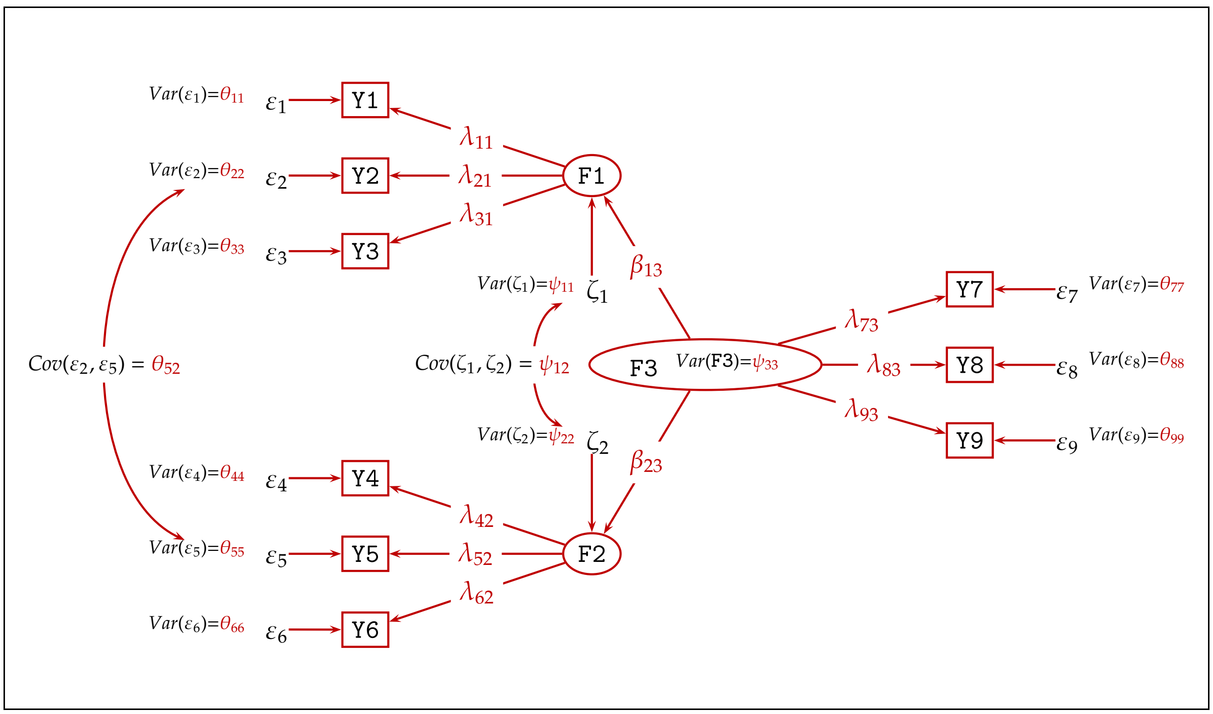
1.2.2 Das vollständige Mplus-Modell für kontinuierliche manifeste und latente Variablen

Im vorangehenden Abschnitt wurde anhand eines einfachen Beispiels die Matrizenrepräsentation von Strukturgleichungsmodellen eingeführt. Als Referenz soll nun in diesem Abschnitt die Matrizendarstellung eines Modells dargestellt werden, welche alle Arten von Parametern von Strukturgleichungsmodellen mit a) kontinuierlichen manifesten und b) kontinuierlichen latenten Variablen beinhaltet. Das in Abbildung (...) dargestellte Modell bezieht sich deshalb auf keine konkrete Modellklasse oder Fragestellung und ist in der dargestellten Form nicht identifiziert[4].

Die zur Spezifikatikon dieses Modells notwendige Syntax im `MODEL`-Abschnitt würde lauten:

```
F1 BY Y1* Y2 Y3;    ! F1 wird gemessen durch Y1, Y2 und Y3
F2 BY Y4* Y5 Y6;    ! F2 wird gemessen durch Y4, Y5 und Y6
F3 BY Y7* Y8 Y9;    ! F3 wird gemessen durch Y7, Y8 und Y9
[F3*];              ! Freisetzung der Erwartungswerts von F3
[F1-F2*];           ! und der Intercepts von F1 und F2.
[Y1-Y9*];           ! Freisetzung aller Fehlervarianzen
F1 WITH F2;         ! Freisetzung der Kovarianz zwischen F1 und F2
Y2 WITH Y5;         ! Freisetzung der Kovarianz zwischen den
                    ! Residuen von Y2 und Y5
```

Das Modell hat $m = 3$ latente Variablen und $p = 9$ manifeste Variablen. Es dient ausschließlich der Illustration der verwendeten Matrizen und Vektoren.



Beginnen wir die Modellbeschreibung in Matrixform wieder mit der **Ψ-Matrix**. Die Matrix hat

[4]Das Modell ist nicth identifiziert aufgrund der Kovarianzz wsichen den Residuen ζ_1 und ζ_2, der fehlenden Skalierungen der Varianzen für die latenten Variablen `F1`, `F2` und `F3` sowie der fehlenden Restriktionen für das Mittelwertsmodell.

die Form $m \times m$, also 3×3 für dieses fiktive Modell. Da es sich um eine Symmetrische Matrix handelt, sind alle Elemente oberhalb der Diagonale weggelassen.

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & & \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Der Parameter ψ_{33} entspricht der Varianz der latenten Variablen `F3` (exogene latente Variable). Die Parameter ψ_{11} und ψ_{22} sind die Residuen (ζ_1 und ζ_2) der Regressionen `F1` auf `F3` und `F2` auf `F3` (ζ_1 und ζ_2 sind Residuen der endogenen latenten Variablen `F1` und `F2`). Die Kovarianz zwischen ζ_1 und ζ_1 ist mit Parameter ψ_{21} abgedeckt (Kovarianz der Residuen endogener Variablen).

Werfen wir jetzt einen genauen Blick auf die **Θ-Matrix**. Die Matrix ist $p \times p$, also 9×9 groß. In der Diagonalen stehen die Fehlervarianzen, außerhalb der Diagonale stehen Nullen. Eine Ausnahme bildet Zeile 5 Spalte 2, da die Residuen ε_2 und ε_5 korrelieren sollen.

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & & & & & & & & \\ 0 & \theta_{22} & & & & & & & \\ 0 & 0 & \theta_{33} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{44} & & & & & \\ 0 & \theta_{52} & 0 & 0 & \theta_{55} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{66} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{77} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{88} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{99} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Die **Λ-Matrix** für das Beispielmodell hat die Größe $p \times m$. Alle nicht im Pfaddiagramm dargestellten Pfade sind auf Null fixierte Konstanten. Die λ's stellen zu schätzende Modellparameter dar:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 \\ 0 & \lambda_{52} & 0 \\ 0 & \lambda_{62} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{73} \\ 0 & 0 & \lambda_{83} \\ 0 & 0 & \lambda_{93} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Zur Spezifikation der Mittelwertsstruktur ist der **Interceptvektor** ν der manifesten Variablen notwendig. Der Modellspezifikation dieses fiktiven Beispiels kann entnommen werden, dass wir alle 9 Intercepte als Parameter spezifizieren wollen. Der $p \times 1$-Vektor dieses Modells wäre also:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \\ \nu_7 \\ \nu_8 \\ \nu_9 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Entsprechend ist auch der Vektor der Erwartungswerte bzw. Intercepts der latenten Variablen α ohne weitere Restriktionen spezifiziert als $m \times 1$-Vektor:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

B: Regressionskoeffizienten zwischen latenten Variablen

Zur Darstellung der Modellstruktur benötigen wir für dieses fiktive Modell abschließend auch noch die B-Matrix, welche bisher noch nicht besprochen wurde. In dieser Matrix sind Parameter der Regression latenter auf latente Variablen enthalten. Diese Matrix hat die Größe $m \times m$ und enthält in der Diagonalen immer Nullen (da die Regression einer latenten Variablen auf sich selbst nicht spezifiziert werden kann):

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 0 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$