Übungsklausur „Wahrscheinlichkeit und Regression“ – Die Lösungen

1. Welche der folgenden Aussagen treffen auf ein Zufallsexperiment zu?
   a) Ein Zufallsexperiment ist ein empirisches Phänomen, das in stochastischen Modellen beschrieben werden soll.
   b) Ein Zufallsexperiment ist charakterisiert durch die Menge der möglichen Ergebnisse, die Menge der möglichen Ereignisse und das Wahrscheinlichkeitsmaß.

2. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß *P* ordnet…
   b) den möglichen Ereignissen eines Zufallsexperimentes Wahrscheinlichkeiten zu.
   c) den Elementarereignissen eines Zufallsexperimentes Wahrscheinlichkeiten zu.

3. Bei dem Zufallsexperiment „Zweimaliges Würfeln mit einem (fairen) Würfel“ ist…
   c) die Anzahl der Elemente der Menge der möglichen Ergebnisse kleiner als die Anzahl der Elemente der Menge der möglichen Ereignisse.

4. Bei dem Zufallsexperiment „Dreimaliges Werfen einer (fairen) Münze“ beträgt die Anzahl der Elemente der Menge der möglichen Ergebnisse:
   c) 8

5. Bei dem Zufallsexperiment „Dreimaliges Werfen einer (fairen) Münze“ beträgt die Anzahl der Elemente der Menge der möglichen Ereignisse:
   f) 256

6. Welche der folgenden Aussagen wird als das Kolmogoroff’sche Axiom der „Normierung“ bezeichnet?
   c) $P(\Omega) = 1$

7. Weitere Kolmogoroff’sche Axiome heißen:
   a) Additivität
   c) Nichtnegativität

8. Die Komponenten eines Wahrscheinlichkeitsraums eines Zufallsexperimentes sind:
   a) Die Menge der möglichen Ergebnisse
   c) Die Menge der möglichen Ereignisse
   d) Das Wahrscheinlichkeitsmaß

9. Für ein Ereignis *A* eines Zufallsexperimentes gilt immer:
   a) Es ist eine Teilmenge der Menge der möglichen Ergebnisse.
   b) Es ist eine Teilmenge der Menge der möglichen Ereignisse.
   c) Dem Ereignis *A* kann eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

10. Für **jedes** Zufallsexperiment ist die kleinstmögliche Sigma-Algebra:
   b) $\mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$

11. Ein W-Raum…
   a) beschreibt ein Zufallsexperiment.
   b) ist die formal-sprachliche Repräsentation des in einem stochastischen Modell betrachteten empirischen Phänomens.
   c) beinhaltet alle Aussagen, die man mit dem betrachteten Zufallsexperiment formulieren kann.

12. In einem psychologischen Zufallsexperiment wird aus der Menge der Personen Anton, Berti und Conni eine Person zufällig gezogen und bearbeitet drei Aufgaben. Es gibt nur die Möglichkeiten die Aufgaben entweder zu lösen (+) oder nicht zu lösen (–). Wie lässt sich die Ergebnismenge dieses Zufallsexperimentes formal repräsentieren?
   a) $\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$
   b) $\{\text{Anton,Berti,Conni}\} \times \{+,-\} \times \{+,-\} \times \{+,-\}$

13. Für das Zufallsexperiment aus Aufg. 12 bedeutet das Ereignis $A_1 := \{\text{Anton}\} \times \{+,-\} \times \{+\} \times \{+,-\}$:
   d) Anton wird gezogen und löst die zweite Aufgabe.

14. Für das Zufallsexperiment aus Aufg. 12 bedeutet das Ereignis $A_2 := \{\text{Anton,Berti}\} \times \{-\} \times \{+,-\} \times \{-\}$:
   d) Anton oder Berti wird gezogen und löst die erste und die dritte Aufgabe nicht.

15. Für das Zufallsexperiment aus Aufg. 12 bedeutet das Ereignis $A_3 := \{\text{Anton,Conni}\} \times \Omega_O$:
   d) Anton oder Conni wird „gezogen“.

16. Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und *A* ein Ereignis $A \in \mathfrak{A}$. Für das Ereignis *A* und sein Komplement $\overline{A}$ gilt:
   a) Sie sind disjunkt.

17. Für das Ereignis *A* und das Ereignis Ω gilt:
   b) Sie sind stochastisch unabhängig.

18. Für das Ereignis *A* und die „Leere Menge“ $\varnothing$ gilt:
   a) Sie sind disjunkt.
   b) Sie sind stochastisch unabhängig.

19. Für das Ereignis *A*, sein Komplement $\overline{A}$, das Ereignis Ω und die „Leere Menge“ $\varnothing$ gilt:
   c) Die Menge $\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$ ist eine s-Algebra.

20. Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und *A* und *B* zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann entspricht die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ in einem Venn-Diagramm…
   a) dem Anteil der Gesamtfläche von *A* an der Gesamtfläche Ω, vorausgesetzt die Ereignisse *A* und *B* sind stochastisch unabhängig.
   b) dem Anteil der Schnittmenge $A \cap B$ an der Gesamtfläche von *B*.

21. Der Ausdruck $P(A|B)$ ist zu lesen als …
   b) Die *B*-bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A*.
   c) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A* gegeben das Ereignis *B*.

22. Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und *A* und *B* zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$, die sowohl disjunkt als auch stochastisch unabhängig sind. Es sei $P(A) = 0,3$. Wie groß ist $P(B)$?
   a) 0

23. Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und *A* und *B* zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$, die sowohl disjunkt als auch stochastisch unabhängig sind. Es sei $P(A) = 0$. Welche(n) Wert(e) kann $P(B)$ annehmen?
   a) 0
   b) 0,3
   c) 0,7
   d) 1

24. Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B und C drei Ereignisse $A, B, C \in \mathfrak{A}$, von denen bekannt sei, dass sie jeweils paarweise stochastisch unabhängig sind. Für **alle drei** Ereignisse gilt dann:
   b) Sie können stochastisch abhängig sein.
   d) Sie können stochastisch unabhängig sein.

25. Was ist bei der Bildung einer Zufallsvariable in einem Zufallsexperiment zufällig?
   a) Die Ergebnisse $? \in \Omega$
   b) Die Werte der Zufallsvariablen

26. Für ein psychologisches Experiment gelte $\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$ mit $\Omega_U = \{\text{Anton, Berti}\}$ und $\Omega_O := \{+, -\}$, wobei „+“ bedeutet, dass die gezogene Person eine bestimmte Aufgabe löst und „–“, dass die gezogene Person eine bestimmte Aufgabe nicht löst. Sei U die Projektion von Ω auf Ω_U und O die Projektion von Ω auf Ω_O.
$U(\langle \text{Anton}, + \rangle)$ bedeutet:
   d) Anton wird gezogen.

27. Für das Experiment aus Aufgabe 26 bedeutet $O(\langle \text{Berti}, - \rangle)$:
   c) Die Aufgabe wird nicht gelöst.

28. Beim einmaligen Würfeln mit einem fairen Würfel lässt sich die Anzahl der Elemente der Menge der möglichen Ereignisse (, die zunächst der Potenzmenge der Menge der möglichen Ergebnisse entspricht) durch Einführen von Zufallsvariablen reduzieren. Eine solche Zufallsvariable sei eine Indikatorvariable. Damit verringert sich die Anzahl der Elemente der Ereignismenge…
   f) von 64 auf 4.

29. Die Menge aller Urbilder $X^{-1}(A')$ entspricht…
   a) der Menge der durch X darstellbaren Ereignisse.
   b) der durch X erzeugten σ-Algebra.

30. Welche Beziehung besteht zwischen numerischen und reellen Zufallsvariablen.
   b) Eine reelle Zufallsvariable ist immer auch eine numerische Zufallsvariable.

31. Die kumulative Verteilung $F^X(a)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X …
   b) einen Wert kleiner oder gleich α annimmt.

32. Gegeben sei eine Tabelle mit den relativen Häufigkeiten einer in einer Stichprobe beobachteten diskreten Zufallsvariable. Man kann…
   b) die Verteilung der Zufallsvariable schätzen.
   d) die kumulative Verteilung der Zufallsvariable schätzen.

33. Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X ist definiert als:
   a) Die mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(X=x)$ gewichtete Summe aller möglichen Werte der Zufallsvariable
   d) Formel: $\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P(X = x_i)$
   f) Der „theoretische Mittel- oder Durchschnittswert“

34. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?
   b) Stochastische Zufallsvariablen können einen Erwartungswert haben.
   c) Kontinuierliche Zufallsvariablen können einen Erwartungswert haben.
   d) Reellwertige Zufallsvariablen können einen Erwartungswert haben.

35. Was bezeichnet das Symbol $E(X=x)$?
   d) Dieses Symbol ist nicht definiert und hat keinerlei Bedeutung.

36. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X kann mit Hilfe einer Stichprobe des Umfangs N:
   b) Durch die Formel $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ geschätzt werden

37. Es wird das Werfen einer fairen Münze betrachtet. Die Zufallsvariable Y soll den Wert eins erhalten, wenn der Wurf „Kopf“ ergibt, ansonsten Null. Der Erwartungswert von Y ist dann:
   d) 0,5

38. Es wird das zweimalige, unabhängige Werfen eines fairen Würfels betrachtet. Die Zufallsvariable Z sei die Summe der gewürfelten Augen beider Würfel. Der Erwartungswert von Z ist dann…
   d) 7

39. Der Erwartungswert einer Indikatorvariablen I (mit den möglichen werten i=0 und i=1) ist gleich:
   a) Der mit den Wahrscheinlichkeiten $P(I=i)$ gewichteten Summe aller möglichen Werte von I
   b) Der Wahrscheinlichkeit $P(I=1)$, dass I den Wert eins annimmt

40. Welche der folgenden Aussagen sind wahr unter der Voraussetzung, dass alle Erwartungswerte existieren und alle erwähnten Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert seien?
   a) Der Erwartungswert einer Konstanten ist gleich der Konstanten selbst.
   b) Der Erwartungswert einer Summe zweier Zufallsvariablen ist gleich der Summe der Erwartungswerte beider Variablen.
   c) Der Erwartungswert einer Summe einer Zufallsvariable und einer Konstante ist gleich der Summe der Konstanten und des Erwartungswertes der Zufallsvariable.
   d) Der Erwartungswert des Produkts einer Konstanten mit einer Zufallsvariable ist gleich dem Produkt der Konstanten mit dem Erwartungswert der Zufallsvariable.

41. Welche der folgenden Gleichungen sind wahr, wenn A und B Zufallsvariablen sind (Konstanten sollen hier als Zufallsvariablen interpretiert werden, welche nur einen Wert annehmen können; alle Erwartungswerte sollen existieren und alle erwähnten Zufallsvariablen seien auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert)?
   a) $E(5) = 5$
   d) $E(1+B) = 1+P(B=1)$, wenn B nur die Werte 0 und 1 annehmen kann

42. Gegeben sei der Erwartungswert einer Zufallsvariable, welche gemessene Längen in cm angibt. Wie ändert sich der Erwartungswert der Variablen, wenn statt in cm alle Längen in mm angegeben werden?
   d) Der Erwartungswert wird um den Faktor 10 größer.

43. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist ein Maß für:
   a) Die Lokalisation der Variablen

44. Der Erwartungswert $E\left[X - E(X)\right]$ ist…
   a) die mittlere Abweichung aller Werte von X von deren Mittelwert.
   b) immer gleich 0.

45. Die Varianz einer Zufallsvariablen X ist definiert als:
   c) $E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$
   e) $E\left[\left(X - E(X)\right)\left(X - E(X)\right)\right]$

46. Die Varianz einer Zufallsvariable *X* ist definiert als:
    b) Die mittlere quadrierte Abweichung aller Werte von *X* von deren Mittelwert

47. Welche Beziehung besteht zwischen der Kovarianz und Varianz?
    c) Die Varianz einer Zufallsvariable ist gleich der Kovarianz dieser Variablen mit sich selbst.

48. Es wird das Werfen einer fairen Münze betrachtet. Die Zufallsvariable *Y* soll den Wert eins erhalten, wenn der Wurf „Kopf“ ergibt, ansonsten Null. Die Varianz von *Y* ist dann:
    d) 0,25

49. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
    d) Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen ist gleich der Summe der Varianzen beider Zufallsvariablen, wenn beide Variablen stochastisch unabhängig sind.

50. Gegeben sei die Varianz einer Zufallsvariable, welche gemessene Längen in cm angibt. Wie ändert sich die Varianz der Variablen, wenn statt in cm alle Längen in mm angegeben werden?
    e) Die Varianz wird um den Faktor 100 größer.

51. Welche der folgenden Gleichungen sind wahr, wenn *A* und *B* Zufallsvariablen sind (Konstanten sollen hier als Zufallsvariablen interpretiert werden, welche nur einen Wert annehmen können; alle Erwartungswerte sollen existieren und alle erwähnten Zufallsvariablen seien auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert):
    c) $Var(5 \cdot B) = 25 \cdot Var(B)$

52. Welche der folgenden Aussagen über Korrelationen ist wahr?
    a) Eine Korrelation ist eine „standardisierte“ Kovarianz.
    b) Ist die Kovarianz negativ, ist auch die Korrelation negativ.

53. Unter welcher der folgenden Bedingungen ist die Kovarianz zweier Variablen *X* und *Y* positiv und hoch/groß?
    b) Wenn ein Wert von *X* weiter vom Mittelwert von *X* abweicht, dann weicht der entsprechende Wert von *Y* in die gleiche Richtung auch weiter vom Mittelwert von *Y* ab.

54. Zwei Zufallsvariablen *X* und *Y* sind regressiv unabhängig. Welche der folgenden Aussagen treffen dann zu?
    b) *X* und *Y* sind korrelativ unabhängig.