Item Response Theorie

N. Rose

8. Vorlesung (18.12.2019)

Response-/Linkfunktionen

Linkfunktionen

- **Ausgangspunkt:**

  Modellierung des Zusammenhangs zwischen latenter (zu messender) Personenvariable ξ und kategorialer manifester Variable!

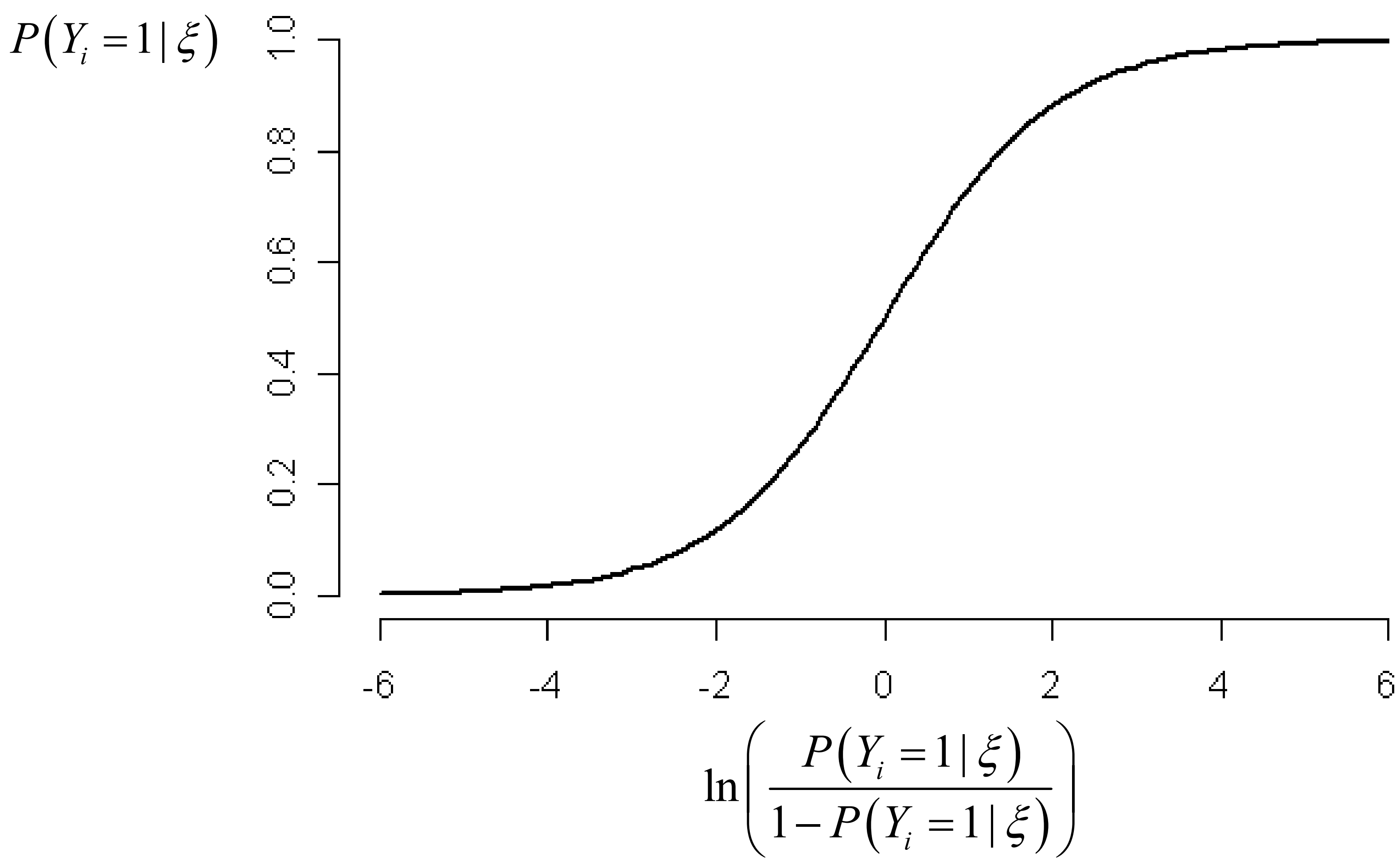
- bei **dichotomen Variablen:**

$$E\left(Y_i \mid \xi\right) = P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)$$

… durch beschränkten Wertebereich [0,1] des Regressanden benötigen wir ein nichtlineare Funktion, zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen ξ und Item Y_i eine sog. **Response-** bzw. **Linkfunktion**! (siehe Generalisierte Lineare Modelle)

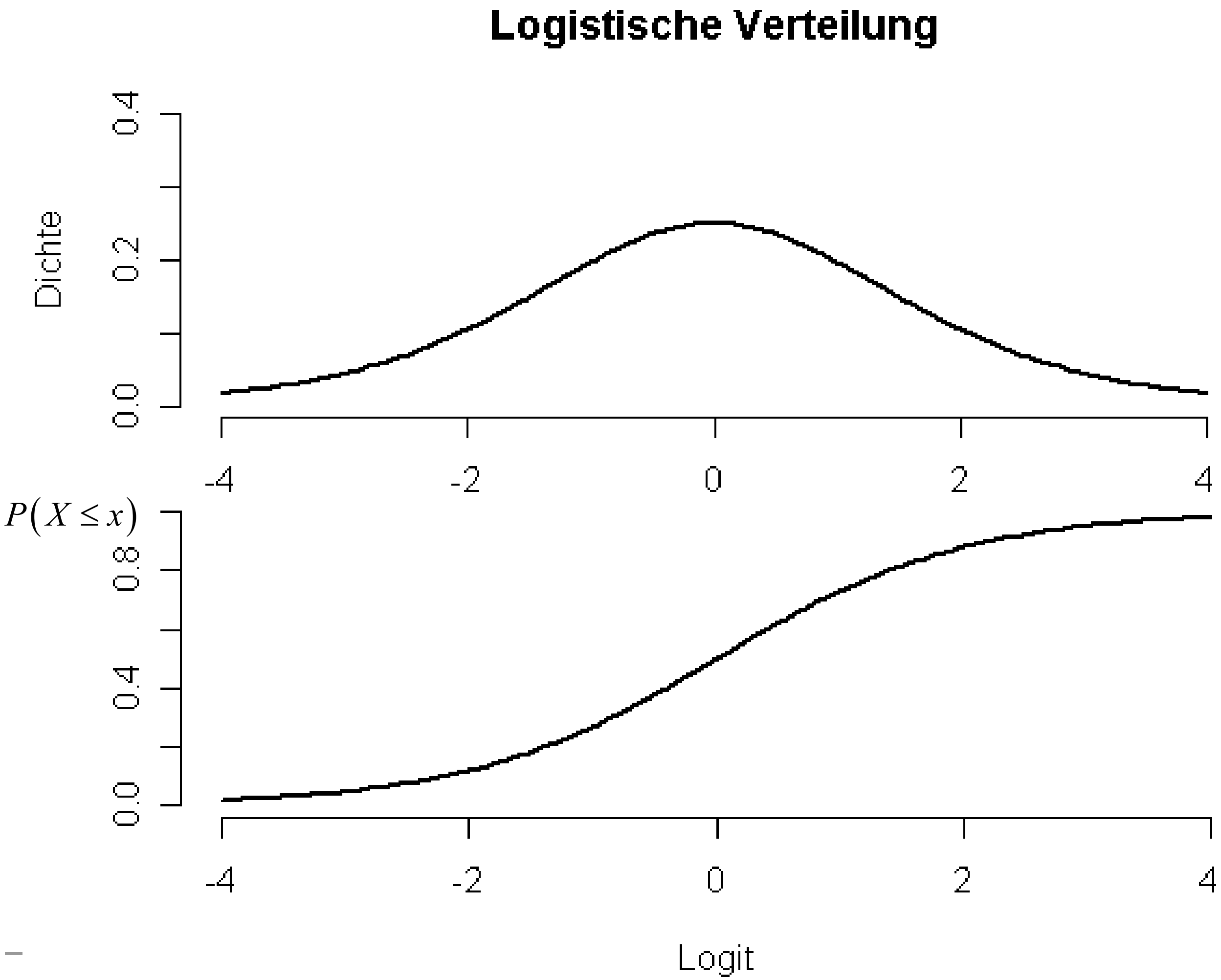
Logistische Funktion als Responsefunktion

- Logistische Verteilungsfunktion:



Logistische Verteilung

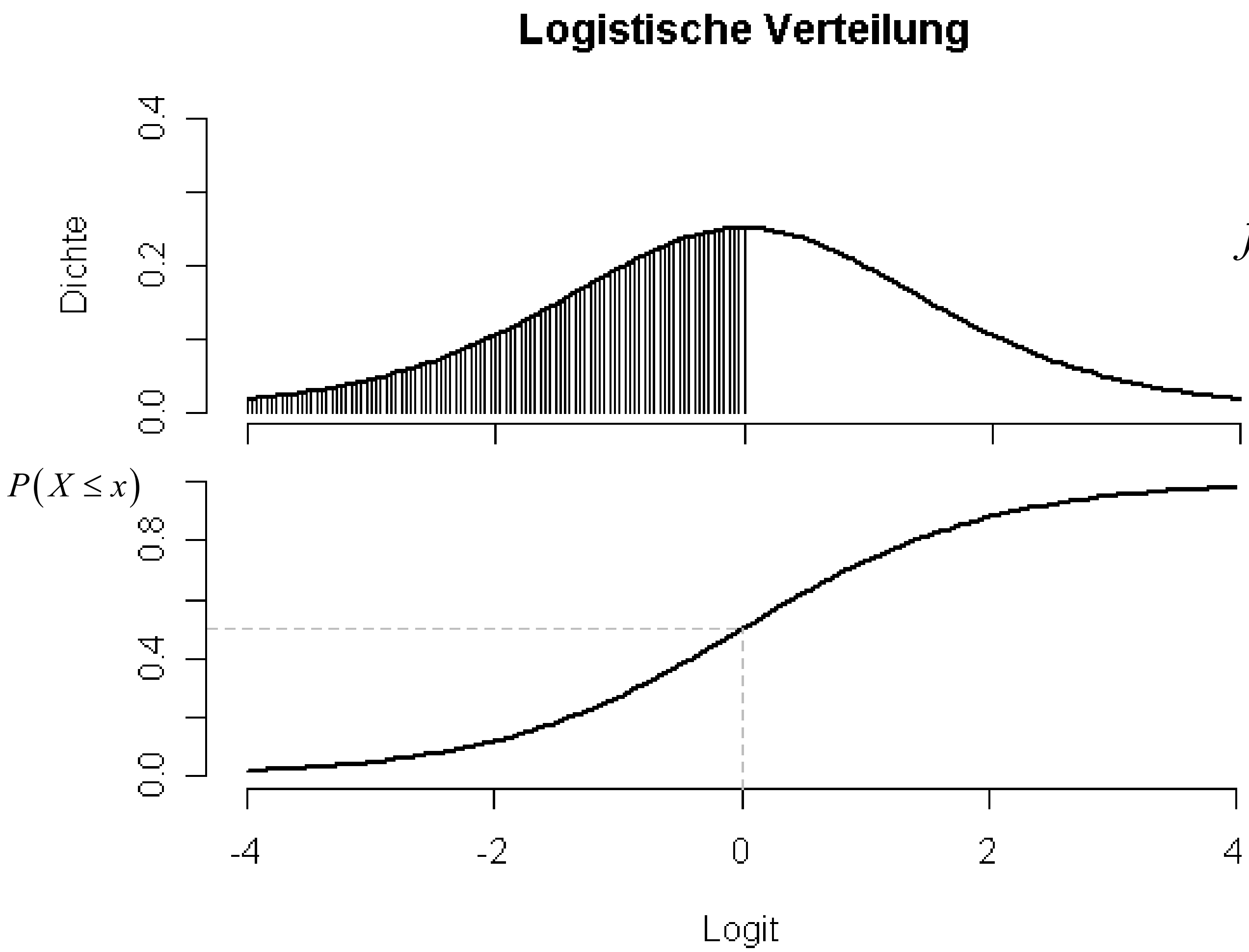
- Dichtefunktion vs. Verteilungsfunktion einer logistisch verteilten Zufallsvariable X: $\Omega \rightarrow \Omega_X$



$$f(X) = \frac{\exp\left(-\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}{\beta\left[1+\exp\left(-\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)\right]^2}$$

$$F(X) = \frac{\exp\left(\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}{1+\exp\left(\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}$$

- Zusammenhang: Dichtefunktion vs. Verteilungsfunktion



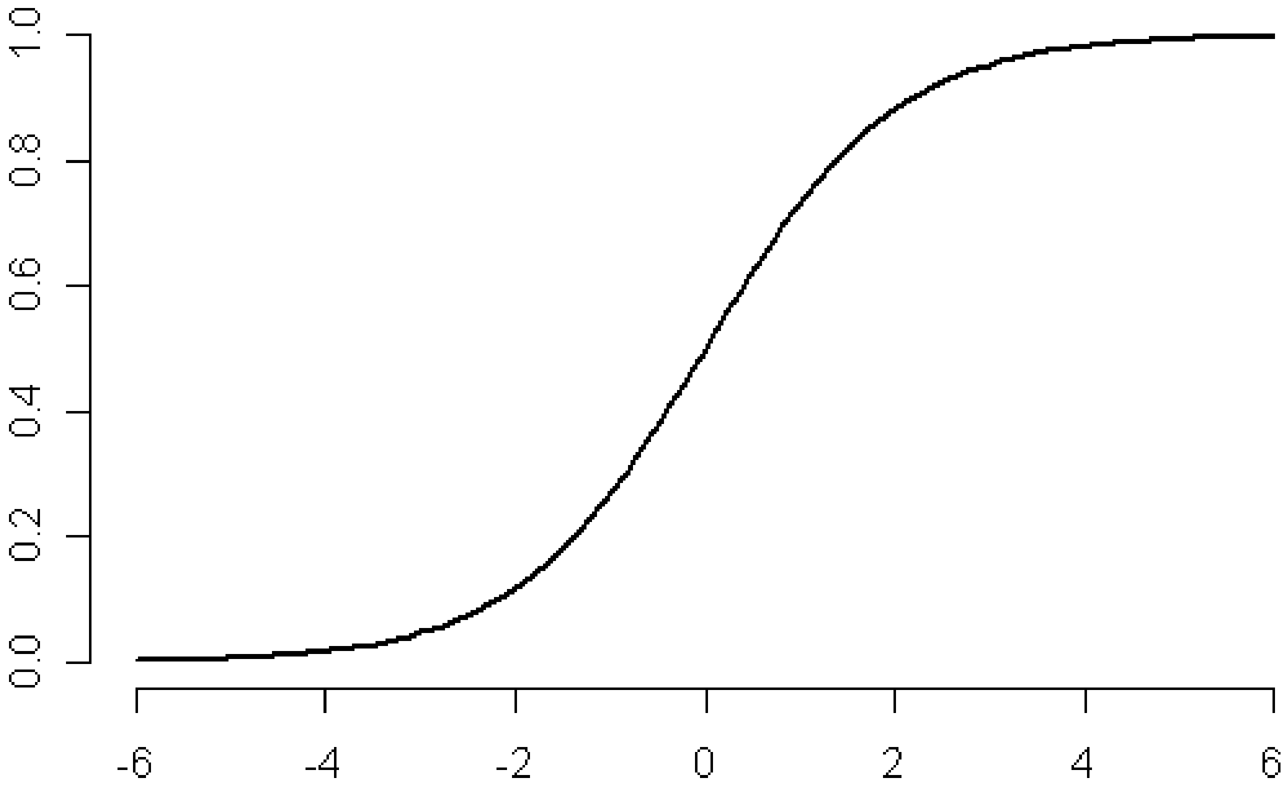
$$f(X) = \frac{\exp\left(-\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}{\beta\left[1+\exp\left(-\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)\right]^2}$$

$$F(X) = \frac{\exp\left(\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}{1+\exp\left(\frac{X-\gamma_0}{\gamma_1}\right)}$$

Logistische Funktion als Responsefunktion

- Logistische Verteilungsfunktion in der IRT:

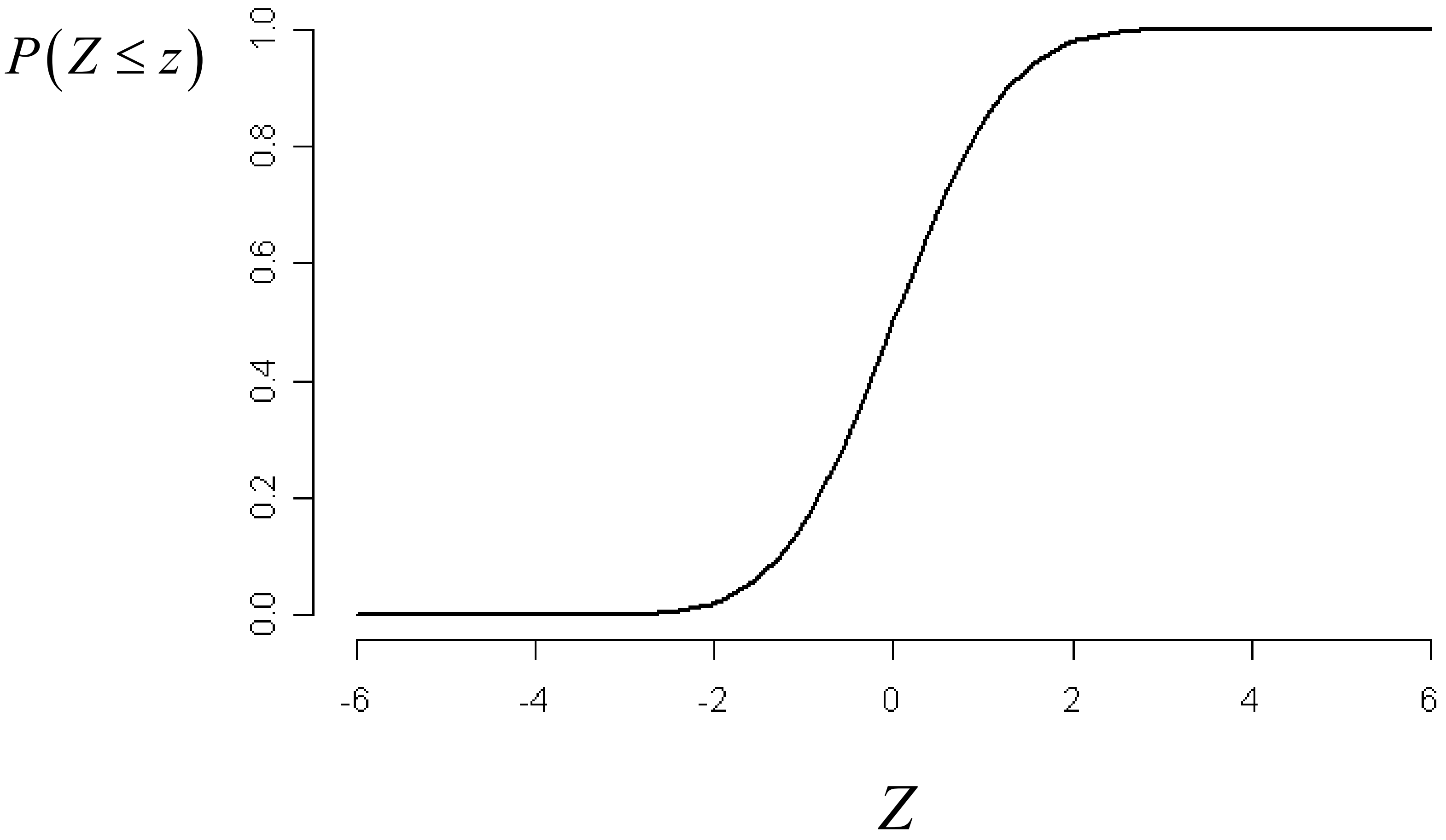
$P(Y_i = 1 \mid \xi)$



$$\ln\left(\frac{P(Y_i = 1 \mid \xi)}{P(Y_i = 0 \mid \xi)}\right) = \alpha_i(\xi - \beta_i)$$

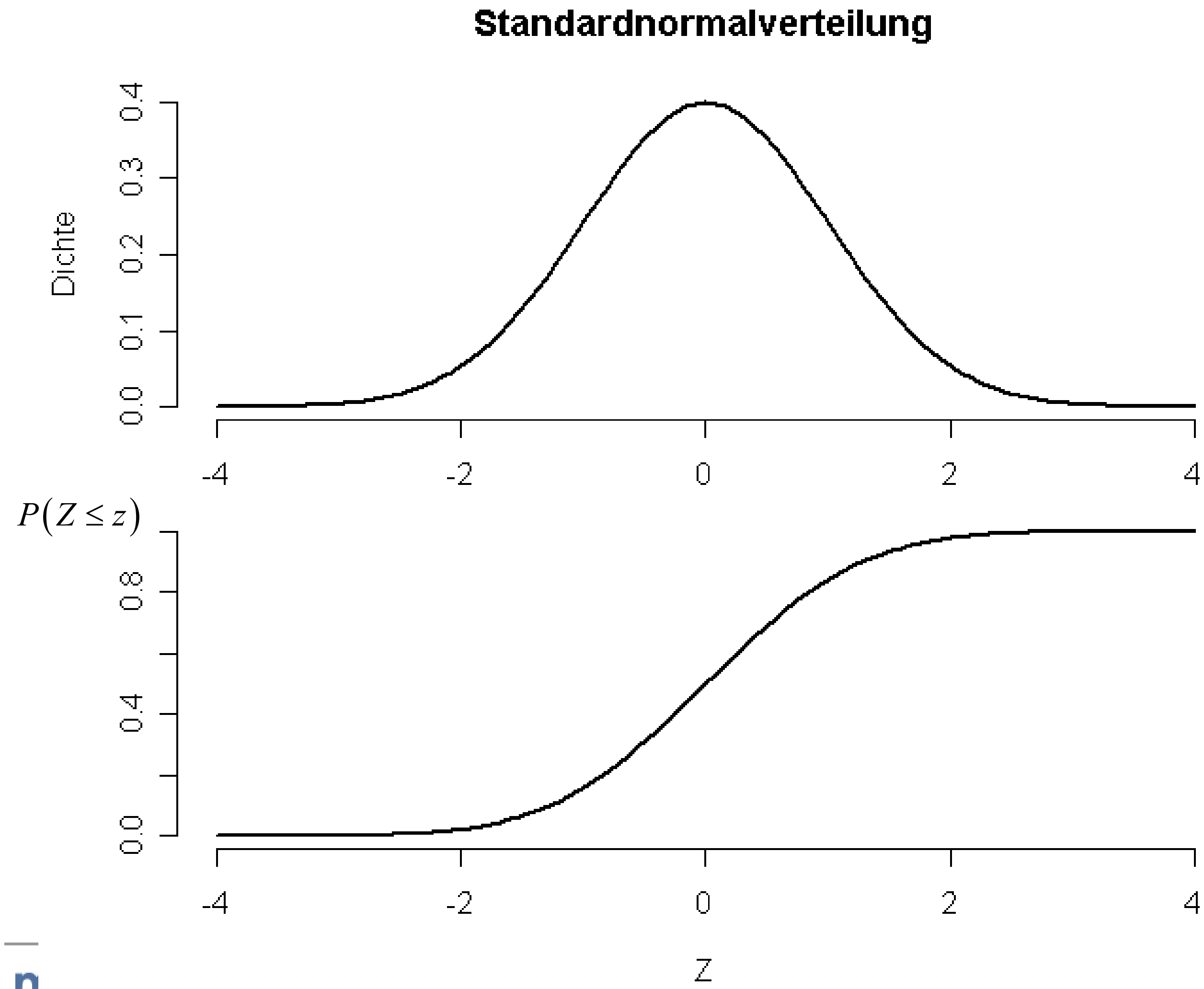
weitere Response-/Linkfunktionen

- Kumulierte **Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung** ($\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$)



Standardnormalverteilung

- Dichtefunktion vs. Verteilungsfunktion einer standardnormal verteilten Zufallsvariable $Z\colon \Omega \rightarrow \Omega_Z$

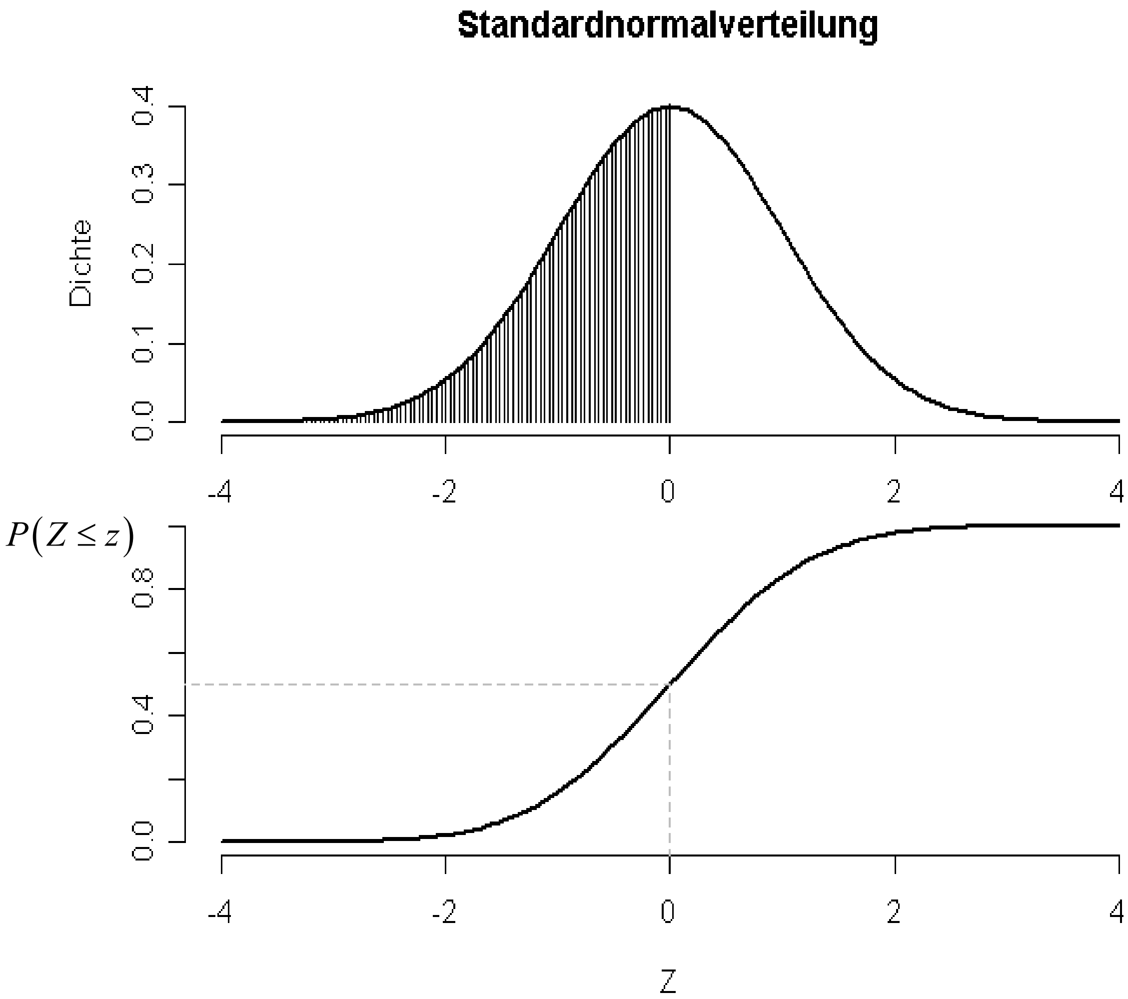


$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z^2}{2}$$

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp - \frac{Z^2}{2}\, dZ$$

Standardnormalverteilung

- Zusammenhang: Dichtefunktion vs. Verteilungsfunktion



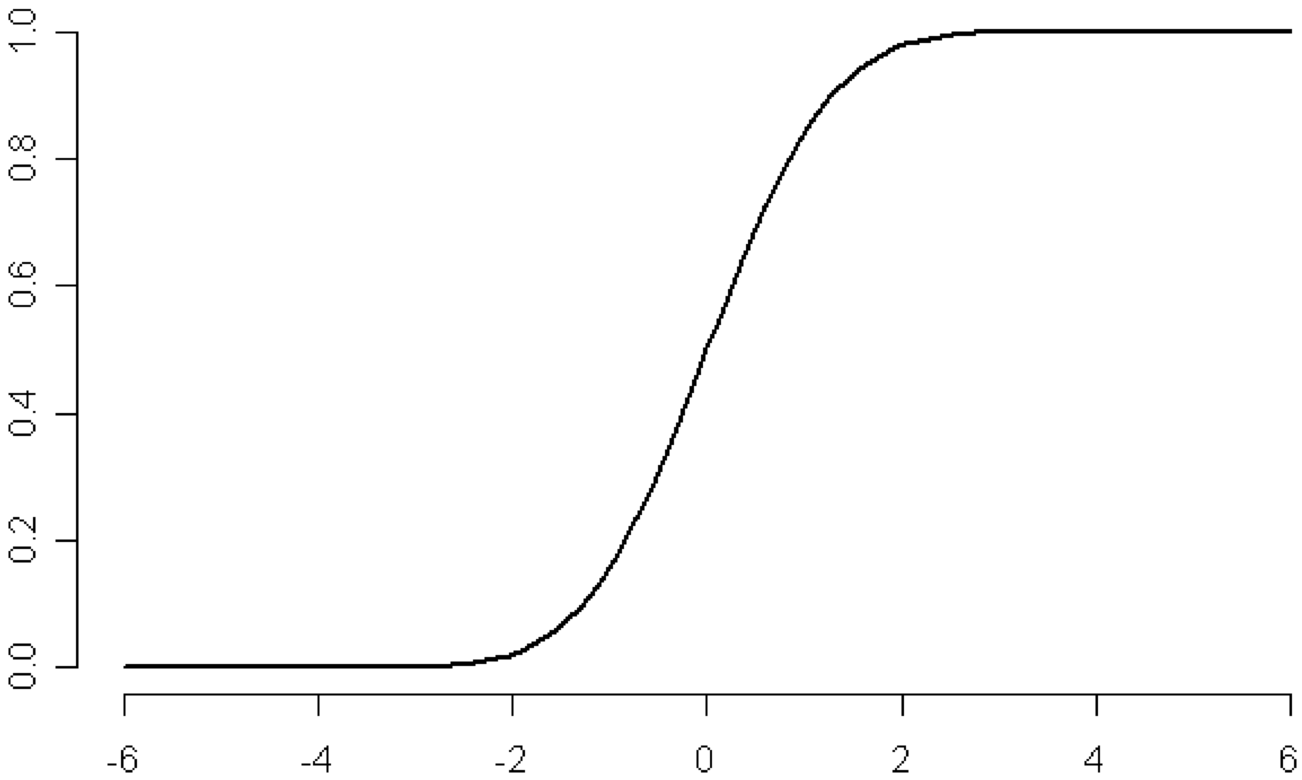
$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z^2}{2}$$

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp - \frac{Z^2}{2}\, dZ$$

weitere Response-/Linkfunktionen

- Kumulierte **Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung als Linkfunktion in der IRT**

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)$$



$$Z = \alpha_i\left(\xi - \beta_i\right)$$

Standardnormalverteilung als Responsefunktion

- **Alternative Parametrisierung** des Normal-Ogiven-Modells zur besseren Interpretation der Modellparameter:

$$P(Y_i = 1 \mid \xi) = \int_{-\infty}^{\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z^2}{2}$$

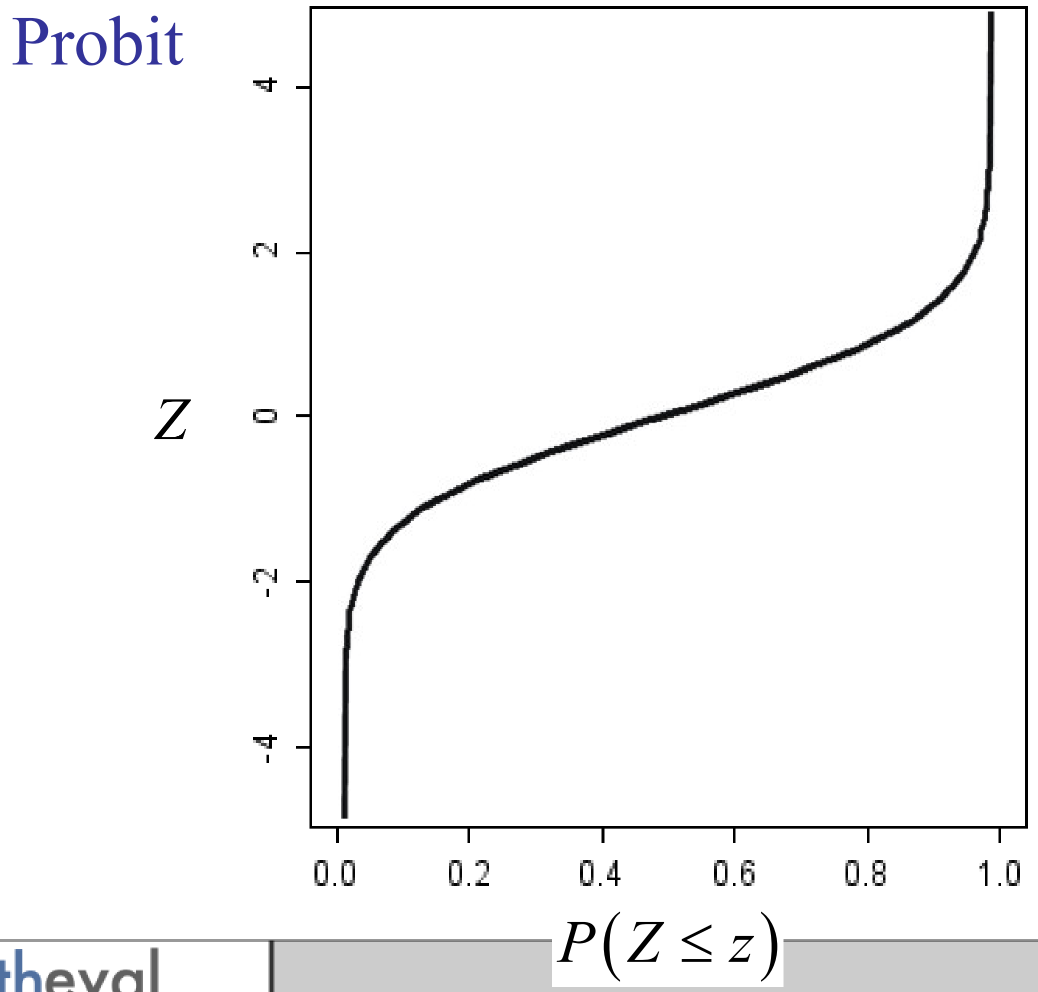
$$= \Phi\left(\alpha_i \cdot (\xi - \beta_i)\right)$$

... sog. **Probit-Modell**

(Φ = kumulative Standardnormalverteilung)

Exkurs → Begriff: Probit

- Die Probit-Variable ergibt sich als Funktionswert (y-Achse) der inversen Standardnormalverteilung Φ^{-1}:

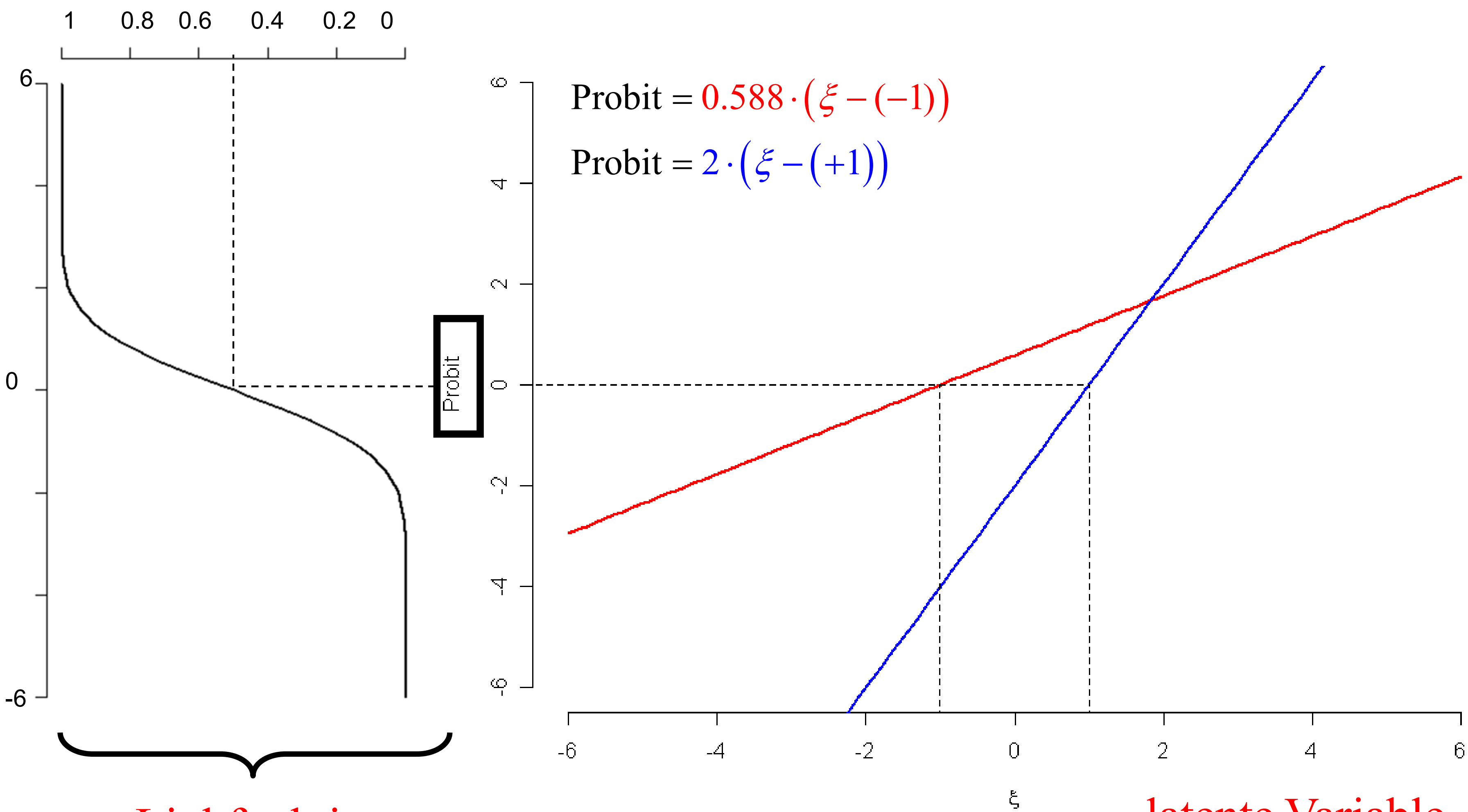


$$\text{Probit} = \Phi^{-1}\left[P\left(Z \leq z\right)\right]$$

Die Werte der Probitvariablen sind die z-Werte der Standard-Normalverteilung, für die gilt: $P(Z \leq z)$

Standardnormalverteilung als Linkfunktion

$P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)$



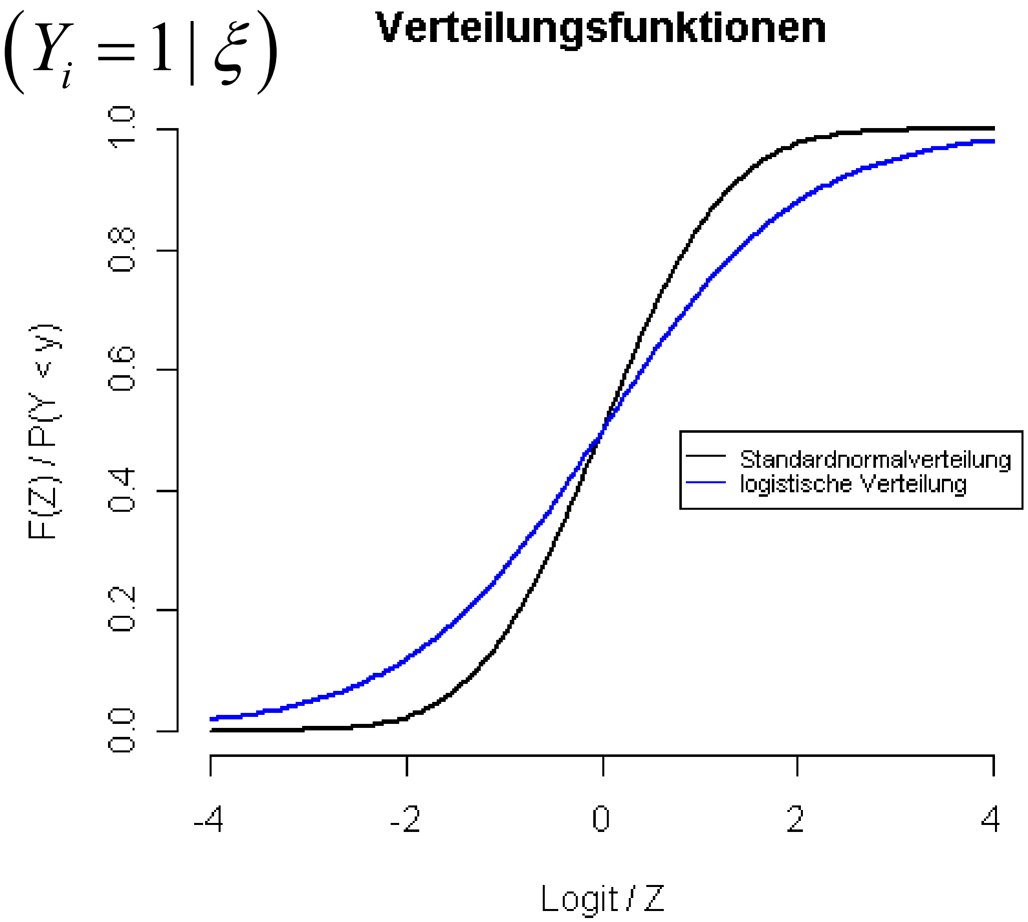
Linkfunktion

latente Variable

Logistische vs. Standardnormalverteilung

- Vergleich der logistischen und der Normalverteilungsfunktion als Responsefunktionen bei gleichen Parametern α_i und β_i

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)$$

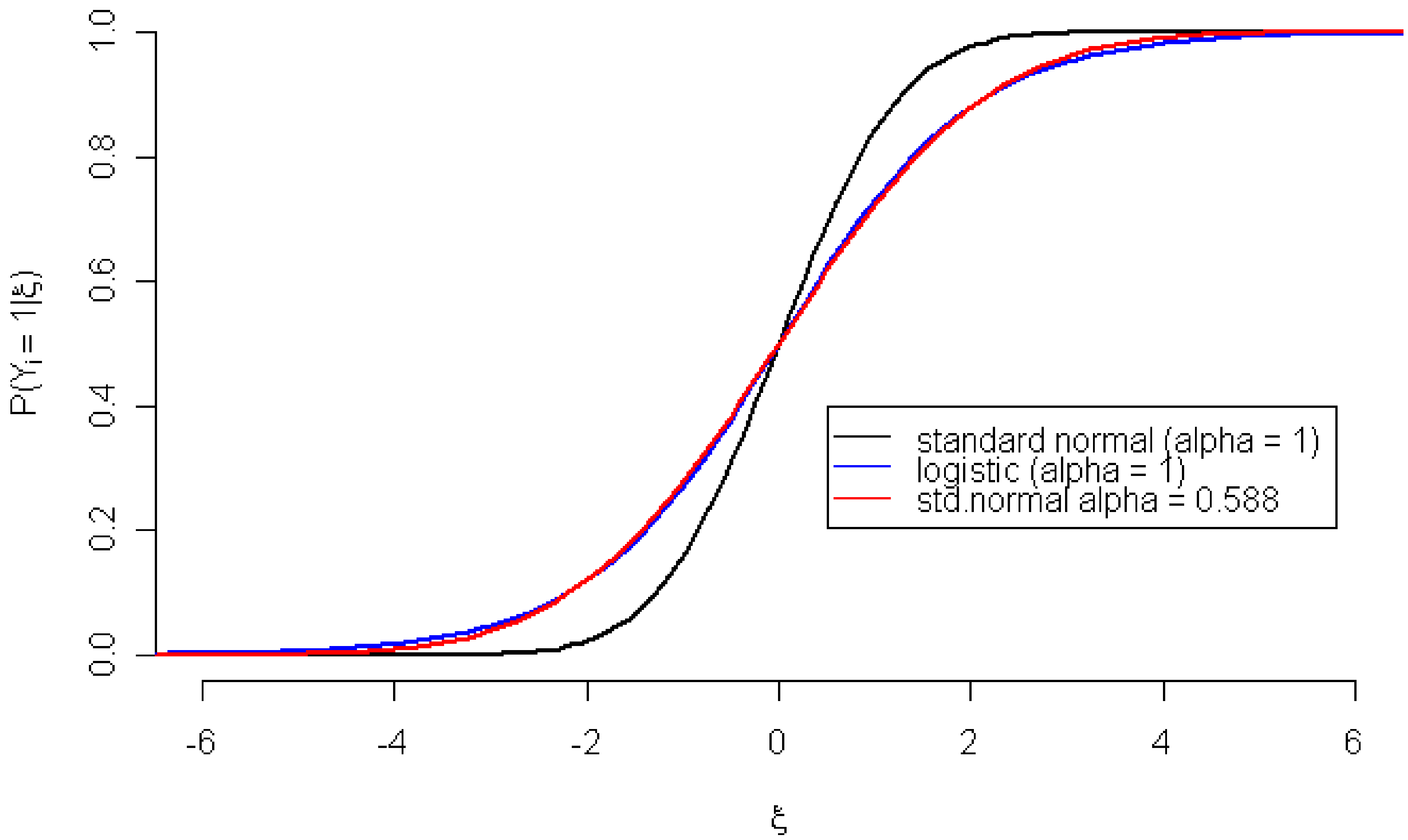


$$Z = \alpha_i\left(\xi - \beta_i\right)$$

$$\ln\left(\frac{P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)}{P\left(Y_i = 0 \mid \xi\right)}\right) = \alpha_i\left(\xi - \beta_i\right)$$

Vergleich Reponsefunktionen

- Logistische Itemresponsemodelle verwenden die logistische kumulative Verteilungsfunktion als Linkfunktion:



Probit vs. Logit

- **Linearität von Logit und Probit in ξ:**

1. Probit

$$P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right) = \Phi\left[\alpha_i^{\text{probit}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{probit}}\right)\right]$$

$$\Phi^{-1}\left[P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)\right] = \alpha_i^{\text{probit}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{probit}}\right)$$

2. Logit

$$\ln\left(\frac{P\left(Y_i = 1 \mid \xi\right)}{P\left(Y_i = 0 \mid \xi\right)}\right) = \alpha_i^{\text{logistic}} \cdot \left(\xi - \beta_i^{\text{logistic}}\right)$$

Umrechnung der Modellparameter

- **Umrechnungsfaktor** zur Berechnung der Modellparameter in der Logitmetrik aus der Probitmetrik ist **1.7**!
  ... Für die **Itemdiskriminationen** α_i folgt:

$$\alpha_i^{logistic} = 1.7 \cdot \alpha_i^{probit}$$

- **Achtung:** Schwellen werden nicht mit transformiert, sofern die latente Variable nicht transformiert wird!
  ➔ In beiden Modellen liegen die Itemschwierigkeiten auf der gleichen Skala wie die latente Variable ξ!

Warum Probitmodelle?

- Historische Bedeutung
  ➔ die ersten IRT-Modelle waren Probitmodelle!
  („Discriminal Dispersion Theory“ von Thurstone, 1927)

- Einige Programme (BILOG, MULTILOG, ...) ermöglichen es, zwischen den beiden Linkfunktionen auszuwählen.

➔ Problem der Modellgeltungskontrolle bei 2PL-Modellen (Birnbaum, Samejima)!

Modellgeltungskontrolle bei 2PL-Modellen

„Whereas with the Rasch model, a number of sound statistical tests have been produced for addressing fit, the situation for the two- and three-parameter models is quite different. Well-established statistical test do not exist, ... "

(W. J. van der Linden & R. K. Hambleton, 1997)

➔ Bis heute gibt es keine suffizienten Tests für 2PL und 3PL-Modelle der IRT!

➔ **ABER** ...

Strukturgleichungsmodelle für geordnete kategoriale Variablen

- Spezielle Strukturgleichungsmodellen für geordnet kategoriale Daten erlaubt (indirekt) die Schätzung der Modellparameter von ein- und zwei-parametrischen Probit-Modellen
- in SEM für kategoriale Daten stehen mehrere Möglichkeiten der **Modellgeltungskontrolle** zur Verfügung (χ^2-Test, RMSEA)

- **Beziehung der Modellparameter:**

  Faktorladungen λ_i und Schwellenparameter δ_{ic} aus diesen Strukturgleichungsmodellen lassen sich in Itemdiskriminationsparameter α_i und Itemschwierigkeiten β_i (in der Probit Metrik!) umrechnen!

SEM für geordnete kategoriale Variablen

- **Univariate Verteilungen und Bivariate Häufigkeitsverteilungen** der manifesten Variablen Y_i bilden den Ausgangspunkt zur Berechnung spezieller Korrelationsmaße:
  - Tetrachorische Korrelationen (dichotome Variablen)
  - Polychorische Korrelationen (ordinale Variablen)

- **Korrelationsmatrix der tetrachorischen u./o. polychorischen Korrelationen** ist die Grundlage der Parameterschätzung und des allgemeinen Modellgeltungstests.

- Nullhypothese des χ^2-Test: $H_0 : \Sigma^* = \Sigma^*(\boldsymbol{\theta})$

SEM für geordnete kategoriale Variablen

- **Modellannahme:**

  ➔ Jeder manifesten kategorialen Variable Y_i liegt eine kontinuierliche (aber „messfehlerbehaftete“) latente Variable Y_i^*!

- Y_i^* wird auch als **Latent Response Variable** (LRV) bezeichnet!

- Aus der univariaten Häufigkeitsverteilung der manifesten Variablen Y_i können die Schwellenparameter δ_i geschätzt werden.

  ➔ **Vorraussetzung**: Annahme der Standardnormalverteilung für Y_i^*.

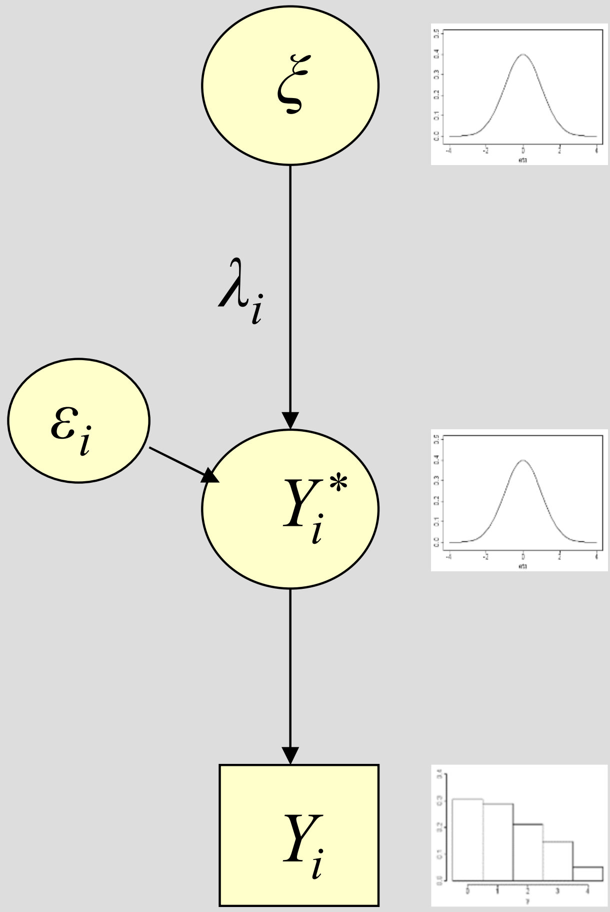
$$Y_i^* \sim N(0,1)$$

SEM für geordnete kategoriale Variablen

Beziehung der Modellvariablen:

latent
(kontinuierlich)

manifest
(kategorial)



$$\xi = f(U)$$

$$Y_i^* = \nu_i + \lambda_i \cdot \xi + \varepsilon_i, \quad Y_i^* \neq f(U)$$

$$Y_i = c \Leftrightarrow \delta_{ic} < Y_i^* < \delta_{ic+1}$$

SEM für geordnete kategoriale Variablen

- **Modellparameter** des Messmodells:

$$\lambda_i = \text{Faktorladung}$$
$$\nu_i = \text{Intercepts des Mesmodells}$$
$$\delta_{ic} = \text{Schwellenparameter (Thresholds)}$$

- **Modellgleichung** und Varianzzerlegung:

$$Y_i^* = \nu_i + \lambda_i \cdot \xi + \varepsilon_i$$
$$Var\left(Y_i^*\right) = \lambda_i^2 \cdot Var\left(\xi\right) + Var\left(\varepsilon_i\right)$$

SEM für geordnete kategoriale Variablen

- Teil des Messmodells sind die Schwellen δ_{ic} der Items:

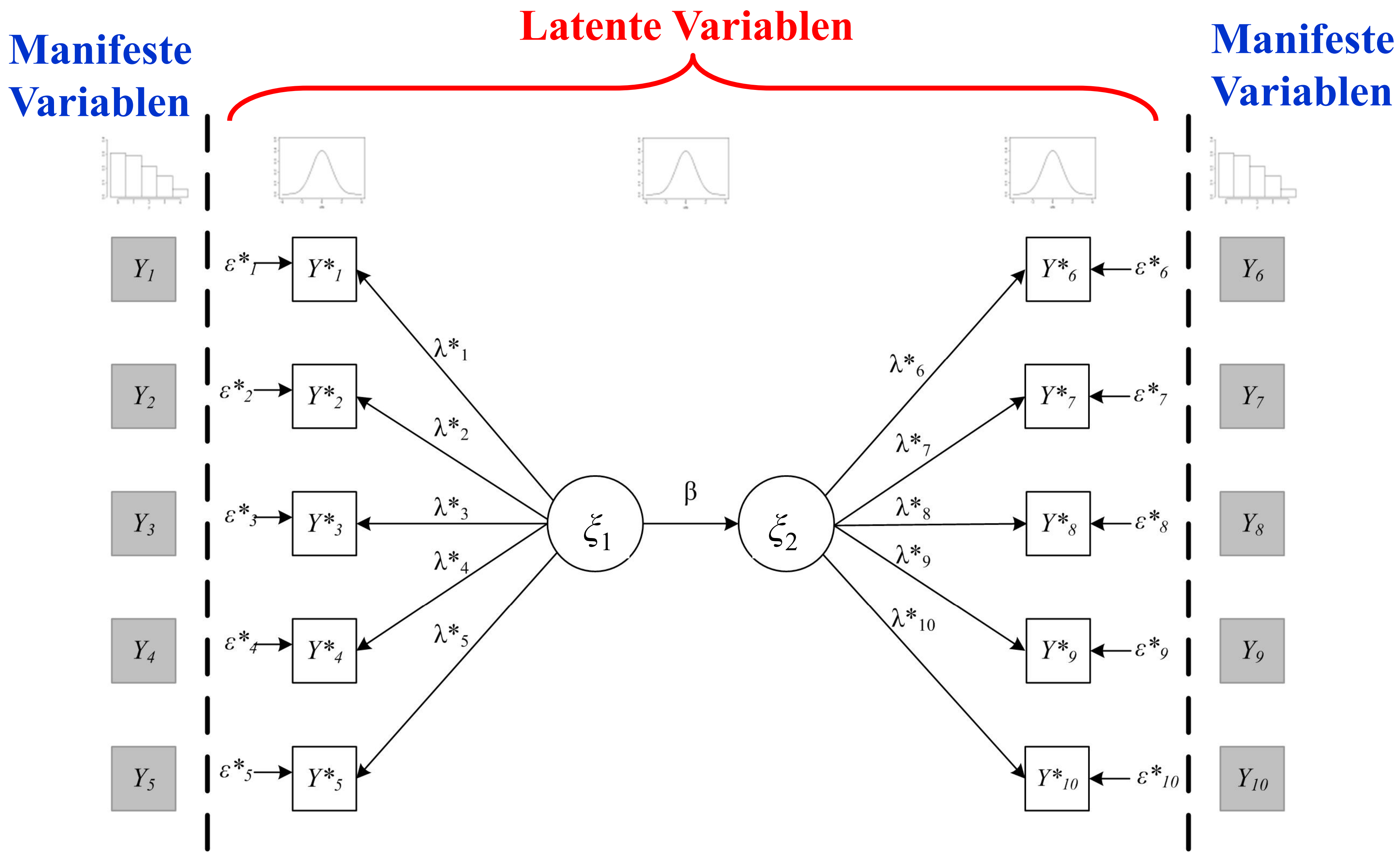
$$Y_i = c \Leftrightarrow \delta_{ic} \leq Y_i^* \leq \delta_{ic+1}$$

- Bei dichotomen Items folgt:

$$Y_i = 0 \Leftrightarrow -\infty < Y_i^* \leq \delta_{i1}$$
$$Y_i = 1 \Leftrightarrow \delta_{i1} < Y_i^* \leq \infty$$

- WICHTIG: Neben der wahren und modellimplizierten Varianz-Kovarianzstrukur gibt es in SEM für kategoriale Variablen auch eine **wahren und eine wahre modellimplizierte Schwellenstruktur**!

Pfaddiagramme bei SEM für kategoriale Variablen



Parameter in R

- **Modellgleichungen in R**: $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\Lambda}\xi + \boldsymbol{\varepsilon}^*$

  $\xi = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\xi + \zeta$

- Zusätzlich für alle items *i*: $Y_i = c \Leftrightarrow \delta_{ic} < Y_i^* < \delta_{ic+1}$

- **Beachte:** Neben der …
  1. … wahren und der wahren modellimplizierten **tetra-/polychorischen Korrelationsstruktur**, sowie …
  2. der wahren und der wahren modellimplizierten **Erwartungswert-struktur**, gibt es in diesen Modellen …
  3. … eine **wahre und eine wahre modellimplizierte Schwellen-struktur!**

Modellidentifikation

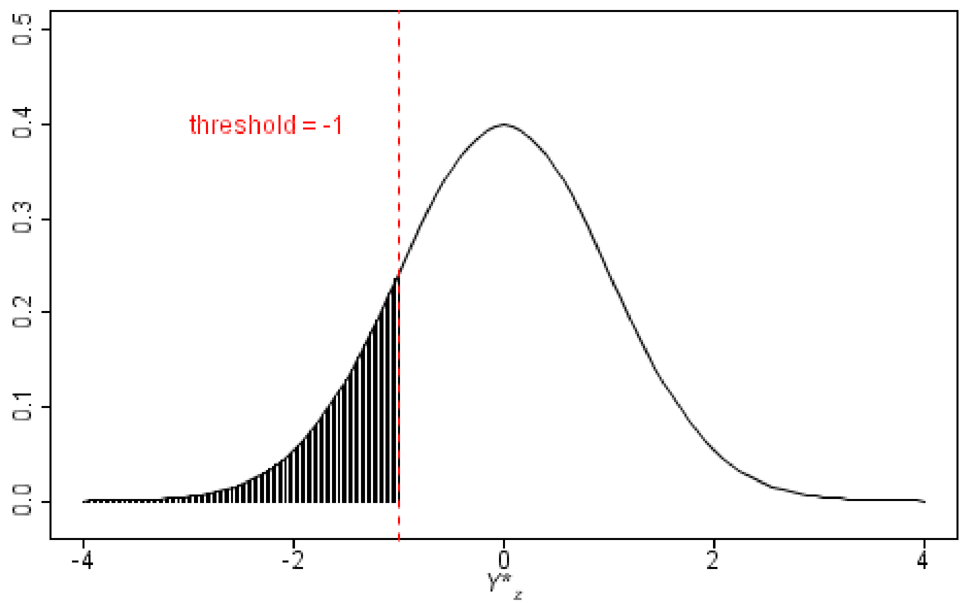
- **Problem: Erwartungswert- und Schwellenstruktur** sind nicht unabhängig voneinander:

  ➔ zur Identifikation ...
  - ... können entweder die Schwellen δ_{ic} restringiert und die Achsenabschnitte v_i frei geschätzt, oder ...
  - ... die Achsenabschnitte $v_i = 0$ restringiert und die Schwellen δ_{ic} frei geschätzt werden (Default-Einstellung in lavaan)

$$
\begin{aligned}
E(Y_i) &= P(Y_i = 1) \\
&= P\left(Y_i^* > \delta_i\right) \\
&= P\left(\nu_i^* + \lambda_i \xi + \varepsilon_i^* > \delta_{i1}\right)
\end{aligned}
$$

Schätzung der Schwellenparameter

- Schätzung der Schwellenparameter erfolgt anhand der univariaten Häufigkeitsverteilung.



$$P\left(Y_i^* \leq \delta_{i1}\right) = \Phi\left(\delta_{i1}\right)$$

Probit!

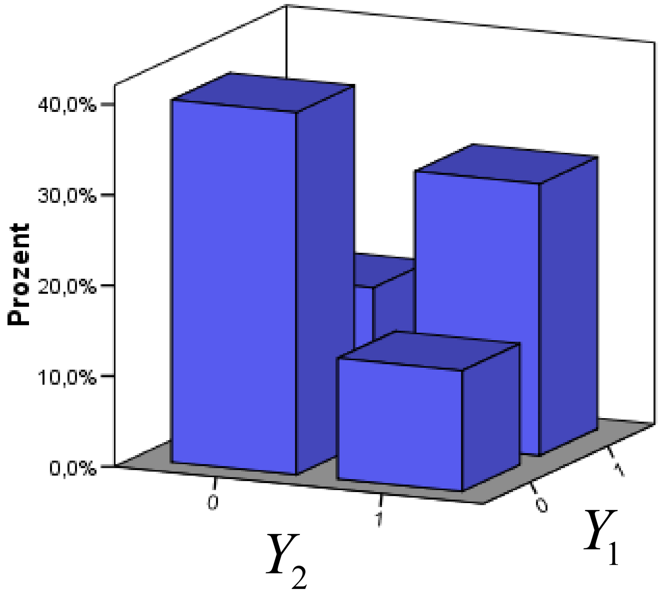
Bsp.: Sei ein dichotomes Item Y_i wobei der Mittelwert bei 0.84 liegt.

$$h\left(Y_i = 0\right) = 0.16$$

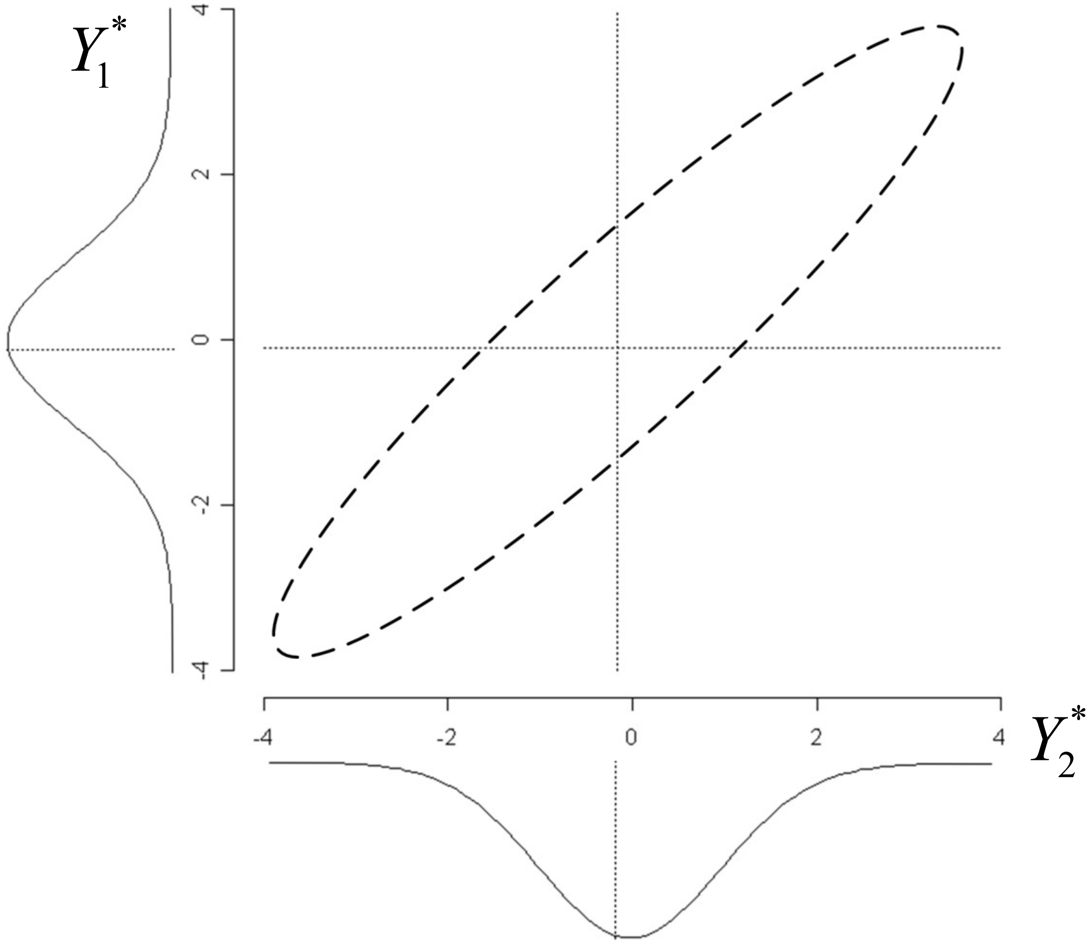
$$h\left(Y_i = 1\right) = 0.84$$

Schätzung der tetrachorischen Korrelationen

- anhand der bivariaten Verteilungen und den Schwellenparametern



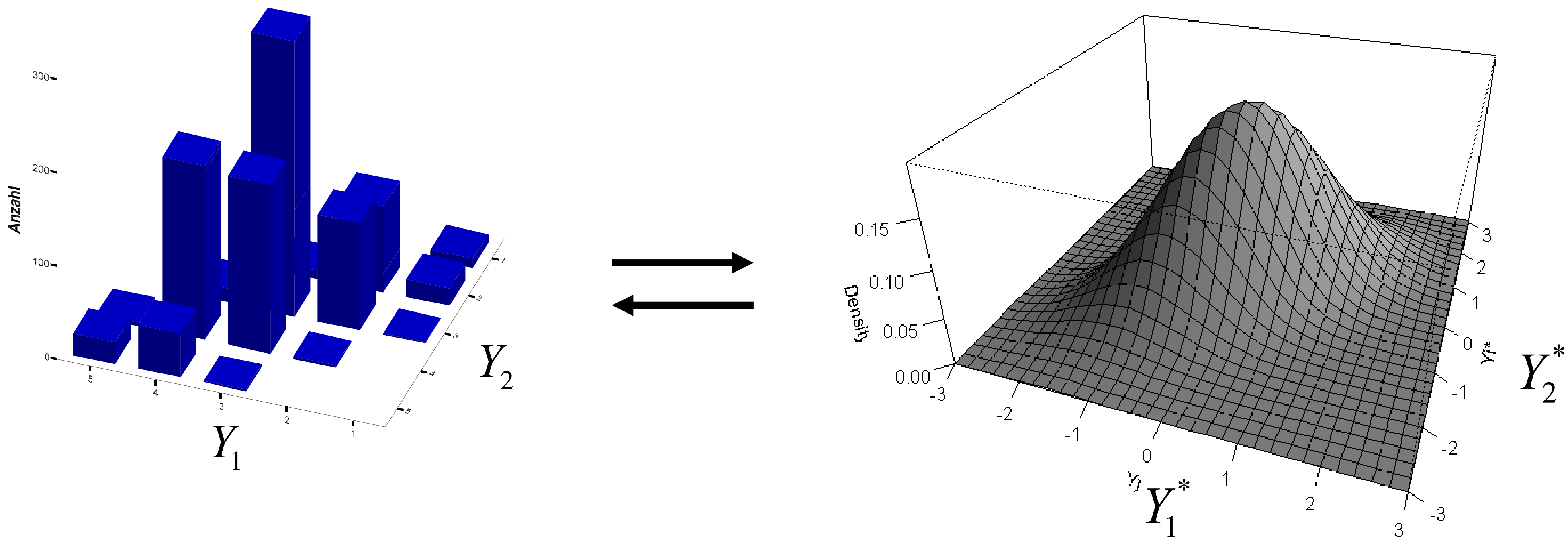
manifeste Variablen



Latent Response Variables

Schätzung der tetra-/polychorischen Korrelationen

- Zusammenhang zwischen der bivariaten Standardnormalverteilung der Latent Response Variablen Y_i^* und Y_j^* der bivariaten Häufigkeitsverteilung der manifesten Variablen .



Schätzung der Modellparameter in R

- Schätzung der Faktorladungen, Varianzen, Mittelwerte, etc. in einem 3. Schritt …
  - auf Basis der initialen Schwellenschätzungen (aus den univariaten Verteilungen der manifesten Variablen) ➔ Schritt 1
  - und den tetra-/polychorischen Korrelationen (aus den bivariaten Verteilungen der manifesten Variablen) ➔ Schritt 2

- Der 3. Schritt der Parameterschätzung erfolgt in R unter Verwendung einer speziellen ***Weighted Least Square Schätzung*** (*WLSMV*).

Schätzung der Modellparameter in R

- „**WLSMV-Schätzer**“ in ***R***:
  - „**W**eigthed **L**east **S**quare Estimator with **V**arianz and **M**ean adjusted χ^2-statistic“
  - Robustes Schätzverfahren bei moderaten Stichprobengrößen ab 200 - 250 Beobachtungen
  - Auch bei nicht normalverteilten manifesten Variablen verwendbar (Ggs. zu *ML*-Schätzung bei SEM!)

    ➔ berücksichtigt Schiefe und Kurtosis der manifesten Variablen!
  - Achtung: **komplizierte Berechnung der Freiheitsgrade** auf Basis der Varianz-Kovarianzstruktur der Variablen und Modellparameter ➔ nicht per Hand möglich!

Anwendung in R

- R code für die 35 Matrizenitem (Wichert et al., 2012)

```
library(lavaan)
bbm <- 'xi =~ NA*rav1 + rav2 + rav3 + rav4 + rav5 + rav6 + rav7 + rav8 + rav9 +
rav10 + rav11 + rav12 + rav13 + rav14 + rav15 + rav16 + rav17 + rav18 + rav19 +
rav20 + rav21 + rav22 + rav23 + rav24 + rav25 + rav26 + rav27 + rav28 + rav29 +
rav30 + rav31 + rav32 + rav33 + rav34 + rav35
# Varianz & Erwartungswert von xi fixieren
xi ~~ 1*xi
xi ~~ 1*0'

bbm.fit <- sem(model=bbm,
           data=data.ordered,
           ordered=paste0("rav",1:35),
           estimator="WLSMV")
```

- **Wichtig** ➔ Schärtzer „WLSMV“ spezifizieren und die manifesten Variablen als ordinale Variablen kennzeichnen ➔ mit dem Argument ordered = …

Anwendung in R

- Output (Ausschnitt) zur Modellgeltungskontrolle:

```
 Estimator                                         DWLS      Robust
  Model Fit Test Statistic                      1447.830    1129.670
  Degrees of freedom                                 560         560
  P-value (Chi-square)                             0.000       0.000
  Scaling correction factor                                    1.784
  Shift parameter                                            318.039
    for simple second-order correction (Mplus variant)

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                            0.055       0.044
  90 Percent Confidence Interval            0.052  0.059       0.041  0.048
  P-value RMSEA <= 0.05                            0.007       0.995
```

- Die Nullhypothese, nach der die wahre und die wahre model-implizierte tetrachorische Korrelations-, Erwartungswert- und Schwellenstruktur gleich sind, muss verworfen werden. ➔ Das Birnbaum-Modell passt nur unzureichend zu den beobachteten Daten.

Anwendung in R

- Zur Erinnerung: **RMSEA** = Root mean squred error of approximation
  - Deskriptiver Kennwert der die fehlende Passung des Modells („*badness-of-fit*“) in Form der Diskrepanz zwischen wahrer und wahrer modellimplizierter Varianz-Kovarianz- & Erwartungswertstruktur quantifiziert
  - RMSEA < 0.05 = gute Modellpassung
  - $0.05 <$ RMSEA < 0.08 = adäquate Modellpassung
  - RMSEA > 0.08 = ungenügende Modellpassung
  - Es gibt die Möglichkeit des Tests der Nullhypothese H_0: RMSEA < 0.05

Anwendung in R

- Output (Ausschnitt) allgemeine Modellgeltungkontrolle:

```
Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
  xi =~
    rav1              0.466    0.108    4.327    0.000
    rav2              0.804    0.080   10.069    0.000
    rav3              0.638    0.090    7.101    0.000
    rav4              0.730    0.077    9.468    0.000
…
Thresholds:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
    rav1|t1          -1.627    0.092  -17.766    0.000
    rav2|t1          -1.793    0.103  -17.433    0.000
    rav3|t1          -1.610    0.091  -17.778    0.000
    rav4|t1          -1.646    0.093  -17.749    0.000
…

Variances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
      xi              1.000
   .rav1              0.783
   .rav2              0.353
   .rav3              0.593    …
```

Faktorladungen λ^*_i

Schwellenparameter δ_{i1}

Varianz der latenten Variablen ξ und Fehlervarianzen $Var(\varepsilon_i^*)$ der *latent response variables* (<u>nicht</u> der manifesten Items!)

SEM für geordnete kategoriale Variablen

- Der **Wert der Strukturgleichungsmodelle für kategorialen Variablen** liegt nicht nur darin ein- und zweiparametrische IRT Modelle **testen** zu können, sondern die Parameter (Faktorladungen, Achsenabschnitte und Schwellen) können auch die entsprechenden **Itemparameter** umgerechnet werden.

Beziehung der Modellparameter

- Umrechnung der Modellparameter SEM ←→ IRT:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\alpha_i^{\text{probit}} \arrow[rr, shift right, "\approx \alpha_i^{\text{probit}} \cdot 1.7"'] \arrow[dr, shift left, "\frac{\alpha_i^{probit}}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{probit}\right)^2}}"'] & & \alpha_i^{\text{logit}} \arrow[ll, shift right, "\approx \alpha_i^{\text{logit}} : 1.7"'] \arrow[dl, shift left, "\approx \frac{\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7}{\sqrt{1+\left(\alpha_i^{\text{logit}} : 1.7\right)^2}}"] \\
& \lambda_{i(z)} \arrow[ul, shift left, "\frac{\lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}"] \arrow[ur, shift left, "\approx \frac{1.7 \cdot \lambda_{i(z)}}{\sqrt{1-\lambda_{i(z)}^2}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\lambda_{i(z)} = \text{Standardisierte Faktorladung}}$

Beziehung der Modellparameter

- SEM ⇐⇒ IRT:
  - Auch die **Itemschwierigkeiten** können in die **Schwellenparameter** der Strukturgleichungsmodelle für kategoriale Daten umgerechnet werden.

$$\delta_{i1} = \nu_i + \lambda_i \beta_i$$

  - Grundgedanke: Die Itemschwierigkeit ist eine Lokation auf der latenten Variable ξ, folglich kann ξ im Messmodell einfach durch β_i ersetzt werden!

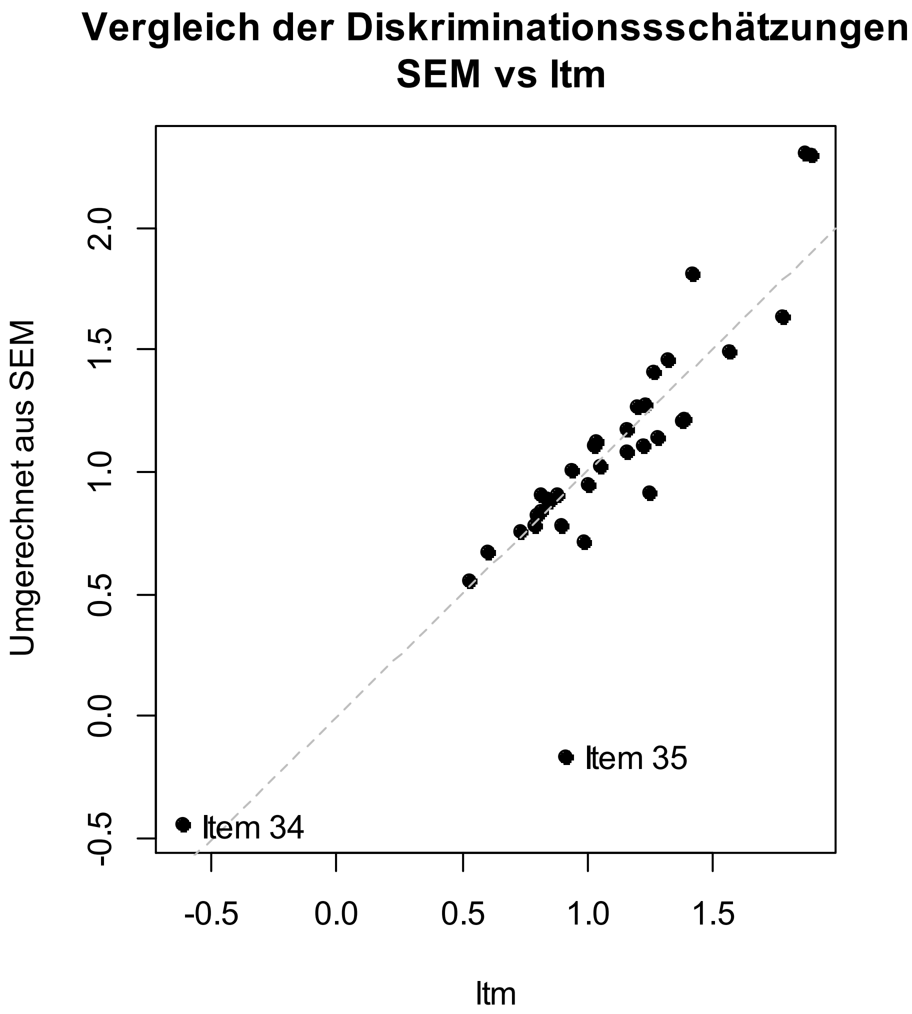
➔ umgekehrt: $$\beta_i = \frac{\delta_{i1} - \nu_i}{\lambda_i}$$

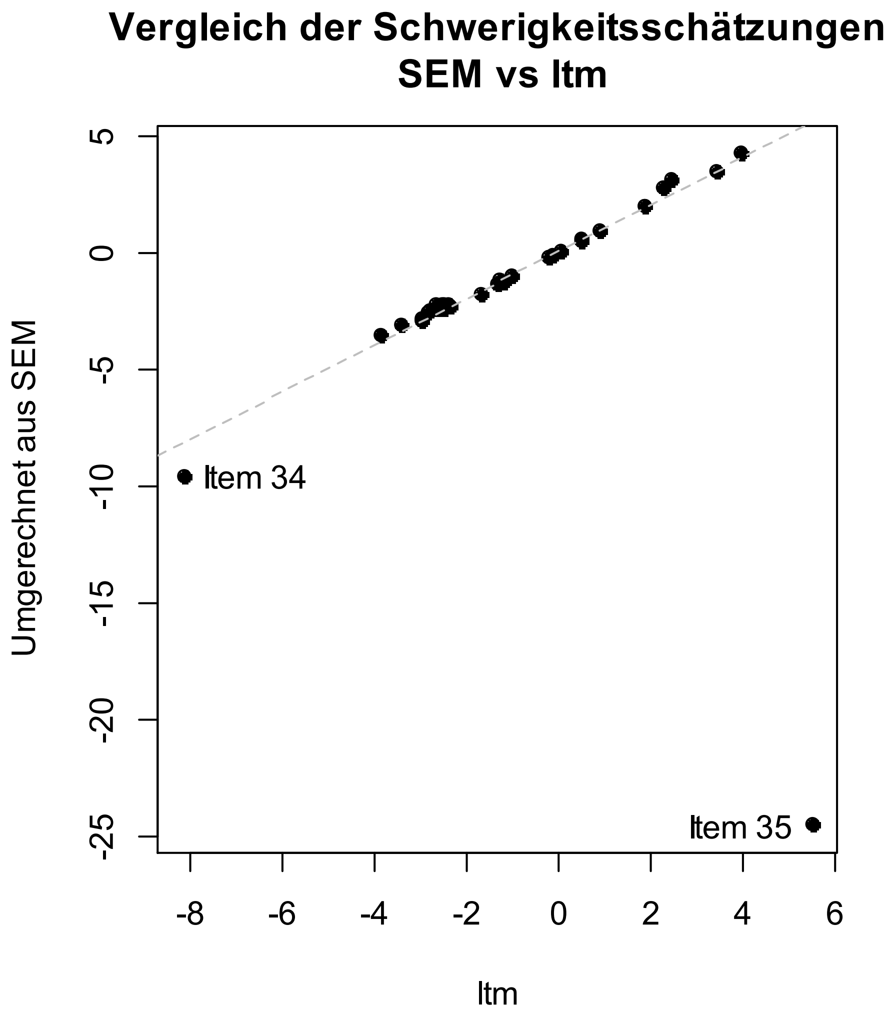
- Umrechnung der SEM-Parameter in R:

```
# graphischer Vergleich Itemschwierigkeiten aus ltm versus berechnet anhand der
# SEM Paramater
converted.discr <- 1.7*coef(fit)[1:35]/sqrt(1 - coef(fit)[1:35]^2)
converted.diffies <- coef(fit)[36:70]/coef(fit)[1:35]
```

Beziehung der Modellparameter

- Am Datenbeispiel:





Vorteile SEM für kategoriale Variablen

- **Modification Indices** zur datenbasierten (!) Modellmodifikation
  - Modification indices geben die erwartete Verbesserung im χ^2–Wert des Modells an, wenn die entsprechende Restriktion hinsichtlich des Parameters aufgehoben wird
  - Die erwartete Änderung (***expected parameter change***, Abk. epc) im Wert des zu schätzenden Parameters wird mit ausgegeben
  - In R:

```
# ... Modification indices
mi <- modindices(fit)
```

  - Output:

```
      lhs op  rhs       mi   epc sepc.lv sepc.all sepc.nox
767 rav32 ~~ rav33 144.348 0.801   0.801    1.009    1.009
758 rav30 ~~ rav31  88.326 0.580   0.580    0.971    0.971
772 rav34 ~~ rav35  63.214 0.468   0.468    0.486    0.486
682 rav22 ~~ rav23  59.936 0.396   0.396    0.661    0.661
763 rav31 ~~ rav32  41.819 0.527   0.527    0.837    0.837
728 rav26 ~~ rav27  37.732 0.354   0.354    0.519    0.519
```

Vorteile SEM für kategoriale Variablen

- **Einfache Erweiterung der Modelle um …**
  - … weitere latente Variablen (Multidimensionale latente Variablen → mehrdimensionale IRT Modelle)
  - … Gruppierungsvariable (Mehrgruppen IRT Modelle)
  - … Drittvariablen X zur Vorhersage der latente Variable ξ in der Regression $E(\xi \mid X)$
  - … Drittvariablen X als abhängige Variable in Regressionen $E(X \mid \xi)$ mit der latenten Variablen als Regressor

- **Demonstration an den Raven-Matrizenitems des Wichert Datensatzes …**

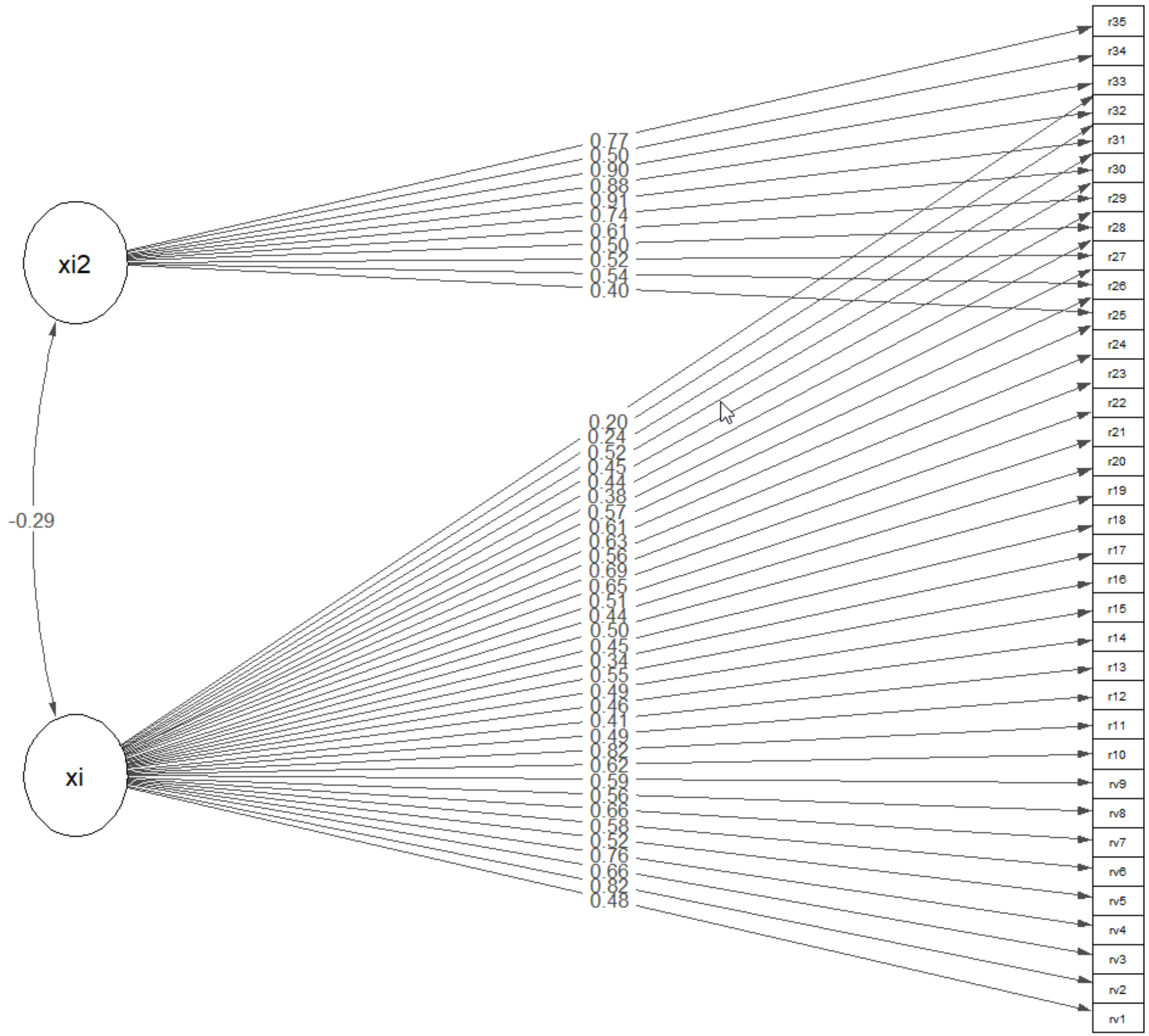
Erweiterung SEM für kategoriale Variablen

- Visualisierung der tetrachorischen Varianz-Kovarianzmatrix der 35 Raven-Matrizenitems (Wichert Datensatz)

	rav1	rav2	rav3	rav4	rav5	rav6	rav7	rav8	rav9	rav10	rav11	rav12	rav13	rav14	rav15	rav16	rav17	rav18	rav19	rav20	rav21	rav22	rav23	rav24	rav25	rav26	rav27	rav28	rav29	rav30	rav31	rav32	rav33	rav34	rav35
rav1	1	0,4	0,32	0,37	0,25	0,28	0,32	0,27	0,29	0,3	0,4	0,24	0,2	0,22	0,24	0,27	0,17	0,22	0,24	0,21	0,25	0,31	0,33	0,27	0,25	0,22	0,2	0,11	0,13	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav2	0,4	1	0,55	0,63	0,43	0,48	0,55	0,46	0,49	0,51	0,68	0,4	0,34	0,38	0,4	0,45	0,28	0,37	0,41	0,36	0,42	0,54	0,57	0,46	0,42	0,37	0,34	0,2	0,22	0,2	0,21	-0,01	-0,05	-0,12	-0,18
rav3	0,32	0,55	1	0,5	0,34	0,39	0,44	0,37	0,39	0,41	0,55	0,33	0,27	0,3	0,33	0,36	0,23	0,3	0,33	0,29	0,34	0,43	0,46	0,37	0,34	0,3	0,28	0,16	0,18	0,16	0,17	-0,01	-0,04	-0,09	-0,15
rav4	0,37	0,63	0,5	1	0,39	0,44	0,5	0,42	0,45	0,47	0,63	0,37	0,31	0,35	0,37	0,42	0,26	0,34	0,38	0,33	0,39	0,49	0,52	0,42	0,39	0,35	0,32	0,18	0,2	0,18	0,2	-0,01	-0,05	-0,11	-0,17
rav5	0,25	0,43	0,34	0,39	1	0,3	0,34	0,29	0,3	0,32	0,43	0,25	0,21	0,24	0,25	0,28	0,18	0,23	0,26	0,23	0,27	0,34	0,35	0,29	0,26	0,23	0,22	0,12	0,14	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav6	0,28	0,48	0,39	0,44	0,3	1	0,39	0,32	0,34	0,36	0,48	0,29	0,24	0,27	0,28	0,32	0,2	0,26	0,29	0,26	0,3	0,38	0,4	0,32	0,3	0,26	0,24	0,14	0,16	0,14	0,15	-0,01	-0,04	-0,08	-0,13
rav7	0,32	0,55	0,44	0,5	0,34	0,39	1	0,37	0,39	0,41	0,55	0,33	0,27	0,3	0,33	0,36	0,23	0,3	0,33	0,29	0,34	0,43	0,46	0,37	0,34	0,3	0,28	0,16	0,18	0,16	0,17	-0,01	-0,04	-0,09	-0,15
rav8	0,27	0,46	0,37	0,42	0,29	0,32	0,37	1	0,33	0,35	0,46	0,27	0,23	0,26	0,27	0,3	0,19	0,25	0,28	0,25	0,29	0,36	0,38	0,31	0,29	0,25	0,23	0,13	0,15	0,13	0,14	-0,01	-0,03	-0,08	-0,12
rav9	0,29	0,49	0,39	0,45	0,3	0,34	0,39	0,33	1	0,37	0,49	0,29	0,24	0,27	0,29	0,32	0,2	0,26	0,3	0,26	0,3	0,38	0,4	0,33	0,3	0,27	0,25	0,14	0,16	0,14	0,15	-0,01	-0,04	-0,08	-0,13
rav10	0,3	0,51	0,41	0,47	0,32	0,36	0,41	0,35	0,37	1	0,51	0,31	0,25	0,29	0,31	0,34	0,21	0,28	0,31	0,27	0,32	0,41	0,43	0,35	0,32	0,28	0,26	0,15	0,17	0,15	0,16	-0,01	-0,04	-0,09	-0,14
rav11	0,4	0,68	0,55	0,63	0,43	0,48	0,55	0,46	0,49	0,51	1	0,4	0,34	0,38	0,4	0,45	0,28	0,37	0,41	0,36	0,42	0,54	0,57	0,46	0,42	0,37	0,34	0,2	0,22	0,2	0,21	-0,01	-0,05	-0,12	-0,18
rav12	0,24	0,4	0,33	0,37	0,25	0,29	0,33	0,27	0,29	0,31	0,4	1	0,2	0,22	0,24	0,27	0,17	0,22	0,25	0,22	0,25	0,32	0,34	0,27	0,25	0,22	0,2	0,12	0,13	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav13	0,2	0,34	0,27	0,31	0,21	0,24	0,27	0,23	0,24	0,25	0,34	0,2	1	0,19	0,2	0,22	0,14	0,18	0,2	0,18	0,21	0,27	0,28	0,23	0,21	0,19	0,17	0,1	0,11	0,1	0,11	0	-0,02	-0,06	-0,09
rav14	0,22	0,38	0,3	0,35	0,24	0,27	0,3	0,26	0,27	0,29	0,38	0,22	0,19	1	0,22	0,25	0,16	0,21	0,23	0,2	0,24	0,3	0,32	0,26	0,23	0,21	0,19	0,11	0,12	0,11	0,12	0	-0,03	-0,07	-0,1
rav15	0,24	0,4	0,33	0,37	0,25	0,28	0,33	0,27	0,29	0,31	0,4	0,24	0,2	0,22	1	0,27	0,17	0,22	0,25	0,22	0,25	0,32	0,34	0,27	0,25	0,22	0,2	0,12	0,13	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav16	0,27	0,45	0,36	0,42	0,28	0,32	0,36	0,3	0,32	0,34	0,45	0,27	0,22	0,25	0,27	1	0,19	0,25	0,27	0,24	0,28	0,36	0,38	0,31	0,28	0,25	0,23	0,13	0,15	0,13	0,14	-0,01	-0,03	-0,08	-0,12
rav17	0,17	0,28	0,23	0,26	0,18	0,2	0,23	0,19	0,2	0,21	0,28	0,17	0,14	0,16	0,17	0,19	1	0,15	0,17	0,15	0,18	0,22	0,24	0,19	0,18	0,16	0,14	0,08	0,09	0,08	0,09	0	-0,02	-0,05	-0,08
rav18	0,22	0,37	0,3	0,34	0,23	0,26	0,3	0,25	0,26	0,28	0,37	0,22	0,18	0,21	0,22	0,25	0,15	1	0,23	0,2	0,23	0,29	0,31	0,25	0,23	0,2	0,19	0,11	0,12	0,11	0,12	0	-0,03	-0,06	-0,1
rav19	0,24	0,41	0,33	0,38	0,26	0,29	0,33	0,28	0,3	0,31	0,41	0,25	0,2	0,23	0,25	0,27	0,17	0,23	1	0,22	0,26	0,33	0,34	0,28	0,26	0,23	0,21	0,12	0,13	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav20	0,21	0,36	0,29	0,33	0,23	0,26	0,29	0,25	0,26	0,27	0,36	0,22	0,18	0,2	0,22	0,24	0,15	0,2	0,22	1	0,23	0,29	0,3	0,25	0,23	0,2	0,18	0,1	0,12	0,1	0,11	0	-0,03	-0,06	-0,1
rav21	0,25	0,42	0,34	0,39	0,27	0,3	0,34	0,29	0,3	0,32	0,42	0,25	0,21	0,24	0,25	0,28	0,18	0,23	0,26	0,23	1	0,33	0,35	0,29	0,26	0,23	0,21	0,12	0,14	0,12	0,13	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11
rav22	0,31	0,54	0,43	0,49	0,34	0,38	0,43	0,36	0,38	0,41	0,54	0,32	0,27	0,3	0,32	0,36	0,22	0,29	0,33	0,29	0,33	1	0,45	0,36	0,33	0,3	0,27	0,15	0,17	0,15	0,17	-0,01	-0,04	-0,09	-0,14
rav23	0,33	0,57	0,46	0,52	0,35	0,4	0,46	0,38	0,4	0,43	0,57	0,34	0,28	0,32	0,34	0,38	0,24	0,31	0,34	0,3	0,35	0,45	1	0,38	0,35	0,31	0,29	0,16	0,18	0,16	0,18	-0,01	-0,04	-0,1	-0,15
rav24	0,27	0,46	0,37	0,42	0,29	0,32	0,37	0,31	0,33	0,35	0,46	0,27	0,23	0,26	0,27	0,31	0,19	0,25	0,28	0,25	0,29	0,36	0,38	1	0,29	0,25	0,23	0,13	0,15	0,13	0,14	-0,01	-0,03	-0,08	-0,12
rav25	0,25	0,42	0,34	0,39	0,26	0,3	0,34	0,29	0,3	0,32	0,42	0,25	0,21	0,23	0,25	0,28	0,18	0,23	0,26	0,23	0,26	0,33	0,35	0,29	1	0,43	0,4	0,3	0,36	0,39	0,46	0,31	0,29	0,11	0,17
rav26	0,22	0,37	0,3	0,35	0,23	0,26	0,3	0,25	0,27	0,28	0,37	0,22	0,19	0,21	0,22	0,25	0,16	0,2	0,23	0,2	0,23	0,3	0,31	0,25	0,43	1	0,45	0,36	0,43	0,48	0,57	0,43	0,42	0,18	0,29
rav27	0,2	0,34	0,28	0,32	0,22	0,24	0,28	0,23	0,25	0,26	0,34	0,2	0,17	0,19	0,2	0,23	0,14	0,19	0,21	0,18	0,21	0,27	0,29	0,23	0,4	0,45	1	0,34	0,4	0,45	0,54	0,41	0,4	0,18	0,28
rav28	0,11	0,2	0,16	0,18	0,12	0,14	0,16	0,13	0,14	0,15	0,2	0,12	0,1	0,11	0,12	0,13	0,08	0,11	0,12	0,1	0,12	0,15	0,16	0,13	0,3	0,36	0,34	1	0,35	0,4	0,48	0,4	0,4	0,19	0,3
rav29	0,13	0,22	0,18	0,2	0,14	0,16	0,18	0,15	0,16	0,17	0,22	0,13	0,11	0,12	0,13	0,15	0,09	0,12	0,13	0,12	0,14	0,17	0,18	0,15	0,36	0,43	0,4	0,35	1	0,48	0,58	0,49	0,49	0,24	0,37
rav30	0,12	0,2	0,16	0,18	0,12	0,14	0,16	0,13	0,14	0,15	0,2	0,12	0,1	0,11	0,12	0,13	0,08	0,11	0,12	0,1	0,12	0,15	0,16	0,13	0,39	0,48	0,45	0,4	0,48	1	0,68	0,6	0,6	0,31	0,48
rav31	0,13	0,21	0,17	0,2	0,13	0,15	0,17	0,14	0,15	0,16	0,21	0,13	0,11	0,12	0,13	0,14	0,09	0,12	0,13	0,11	0,13	0,17	0,18	0,14	0,46	0,57	0,54	0,48	0,58	0,68	1	0,73	0,74	0,38	0,59
rav32	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	0	0	-0,01	-0,01	0	0	-0,01	0	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	0,31	0,43	0,41	0,4	0,49	0,6	0,73	1	0,72	0,4	0,63
rav33	-0,03	-0,05	-0,04	-0,05	-0,03	-0,04	-0,04	-0,03	-0,04	-0,04	-0,05	-0,03	-0,02	-0,03	-0,03	-0,03	-0,02	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03	-0,04	-0,04	-0,03	0,29	0,42	0,4	0,4	0,49	0,6	0,74	0,72	1	0,42	0,65
rav34	-0,07	-0,12	-0,09	-0,11	-0,07	-0,08	-0,09	-0,08	-0,08	-0,09	-0,12	-0,07	-0,06	-0,07	-0,07	-0,08	-0,05	-0,06	-0,07	-0,06	-0,07	-0,09	-0,1	-0,08	0,11	0,18	0,18	0,19	0,24	0,31	0,38	0,4	0,42	1	0,38
rav35	-0,11	-0,18	-0,15	-0,17	-0,11	-0,13	-0,15	-0,12	-0,13	-0,14	-0,18	-0,11	-0,09	-0,1	-0,11	-0,12	-0,08	-0,1	-0,11	-0,1	-0,11	-0,14	-0,15	-0,12	0,17	0,29	0,28	0,3	0,37	0,48	0,59	0,63	0,65	0,38	1

Erweiterung SEM für kategoriale Variablen

- 2-dimensionales IRT Modell basierend auf der Inspektion der tetrachorischen Varianz-Kovarianzmatrix



Erweiterung SEM für kategoriale Variablen

- 2-dimensionales IRT Modell mit der Zahl der beantworteten Items (*z*-standardisiert) als Regressor